17.04.09

Komplexe Funktionen

Es gilt

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

(folgt aus Potenzreihendarstellung)

Damit

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

Achtung: $|\sin z|$, $|\cos z|$ nicht beschränkt für $z \in \mathbb{C}$!

$$z = iy : |\sin z| = \frac{1}{2} |e^{-y} - e^{y}| \xrightarrow{|y| \to \infty} \infty$$

① Zur Geometrie kompl. Funktionen

i.) $f(z) = az + b$

$$= |a|\, e^{i\varphi} z + b, \quad \varphi = \arg(a)$$

Komposition aus

Stauchung / Streckung mit $|a|$

Drehung um φ

Translation mit b

ii) $f(z) = a z^2 + \underbrace{bz + c}_{\text{linearer Anteil} \rightarrow \text{i.)}}$

Betrachte Geometrie von $z \mapsto z^2$

170409

Betrachte achsenparallele Geraden

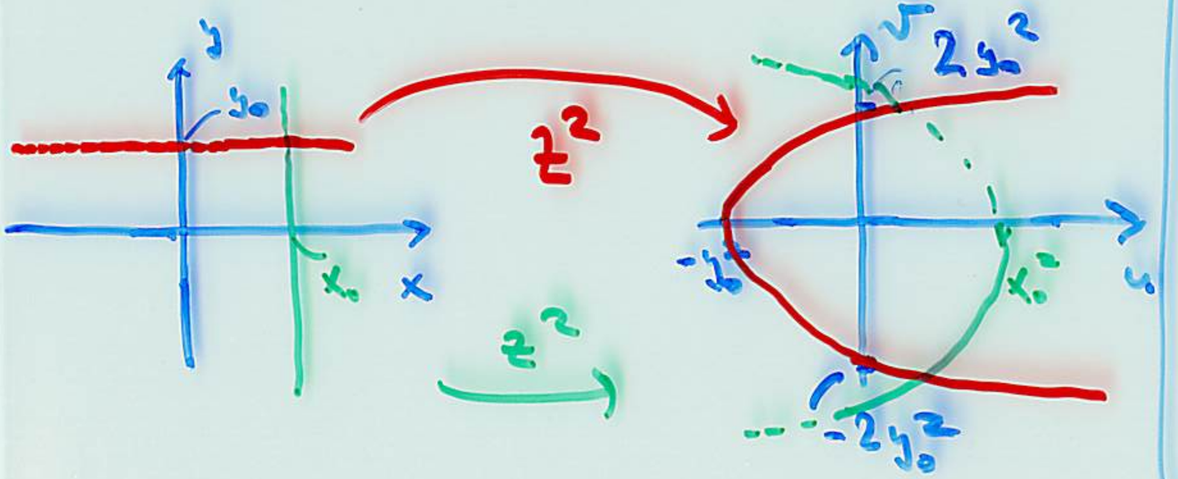
$y = y_0$ (Parallele zur x-Achse)

$$w = z^2 \overset{z = x+iy}{=} x^2 - y^2 + i\,2xy = u + iv$$

$y = y_0$: $u = x^2 - y_0^2$

$v = 2x y_0$

$$\rightarrow \quad u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2 \qquad y_0 \neq 0$$

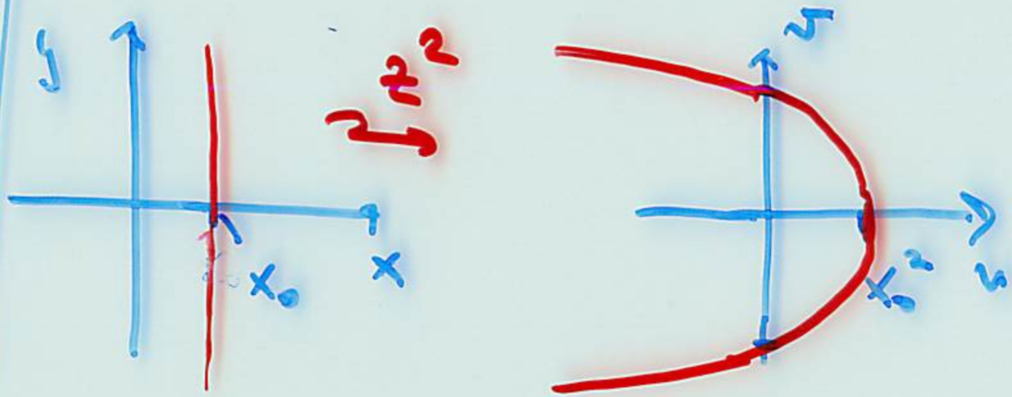


②

$x = x_0$ (Parallele zur y-Achse)

$u = x_0^2 - y^2 \qquad v = 2x_0 y$

$$\rightarrow \quad u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$$

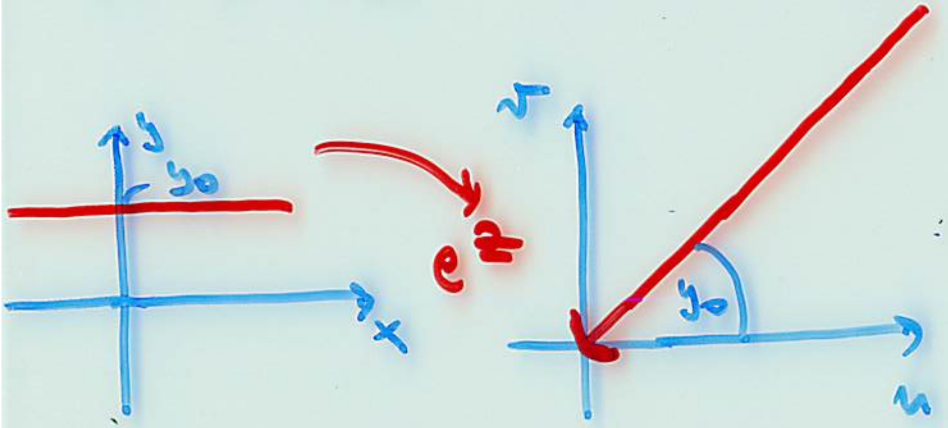


Exponentialfunktion

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$
$$= e^x(\cos y + i \sin y)$$

$y = y_0$ (Parallele zur x-Achse)

$u = e^x \cos y_0 \qquad v = e^x \sin y_0$



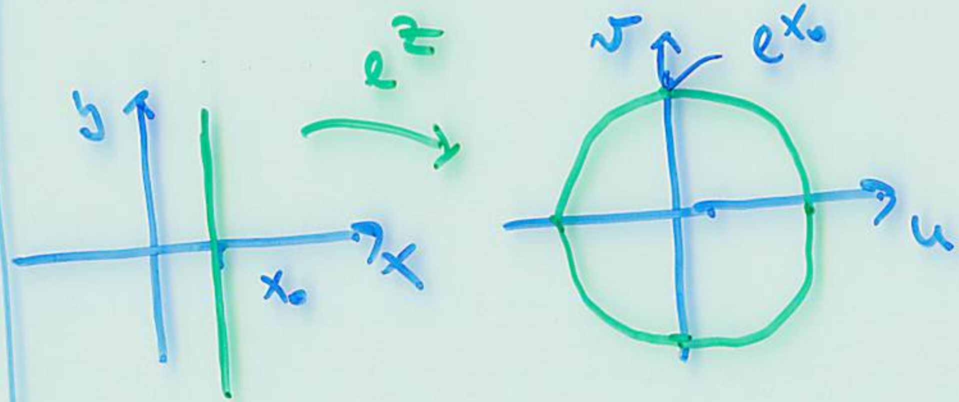
Aber: $e^{z+i2\pi k} = e^z$, $\quad k \in \mathbb{Z}$

weil $e^{i2\pi k} = 1$

„Periodizität der Exponentialfunktion"

$x = x_0$ (Parallele zur y-Achse)

$u = e^{x_0} \cos y \qquad v = e^{x_0} \sin y$



„ $e^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ "

Punktierte komplexe Ebene

170409

Umkehrfunktionen

$f(z)$ heißt eineindeutig (injektiv), falls es zu jedem $w \in W(f)$ genau ein $z \in D(f)$ mit $f(z) = w$.

Bsp: i) $f(z) = az + b$, $a \neq 0$ injektiv mit $D = W = \mathbb{C}$

ii) $f(z) = z^2$ nicht injektiv mit $D = \mathbb{C}$, weil $f(z) = f(-z)$

iii) $f(z) = e^z$ nicht injektiv, weil $f(z) = f(z + i2\pi k)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

Schränke Definitionsbereich ein

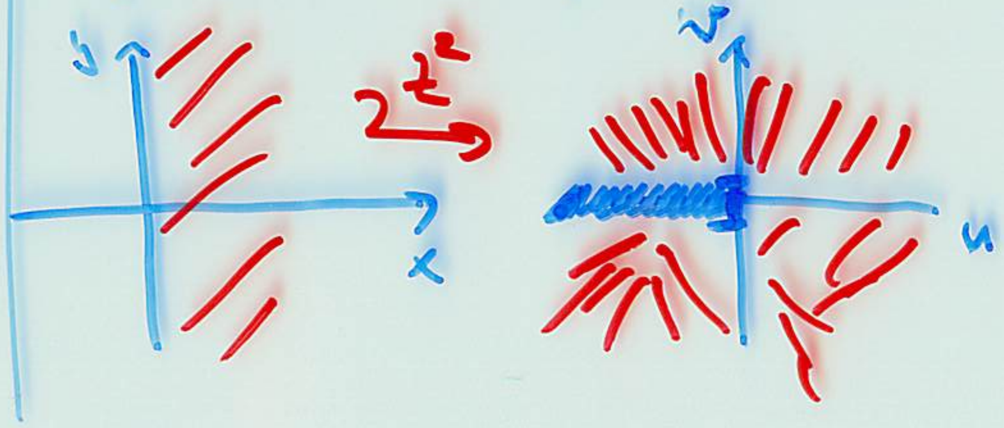
Bsp: $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$

Hier ist f injektiv mit

$$W(f) = \{ z \in \mathbb{C} ;\ \operatorname{Im} z \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re} z > 0 \}$$

$$= \mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{R} ;\ z \leq 0 \} =: \mathbb{C}^-$$

geschlitzte komplexe Ebene.



17.04.09

Sei $f: D(f) \to W(f)$ injektiv

Dann ist die Umkehrfunktion

$f^{-1}: W(f) \to D(f)$

die Funktion, welche

$$(f^{-1} \circ f)(z) = z \quad \forall z \in D(f)$$

$$(f \circ f^{-1})(w) = w \quad \forall w \in W(f)$$

<u>Bsp</u>: Sei

$D(f) = \{ z = re^{i\varphi} ;\ r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \}$

Dann ist z^2 injektiv mit $W(f)$
$= \mathbb{C}^-$

(5)

$f^{-1}: W(f) \to D(f)$

$w = f^{-1}(z) = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2}$

n-te Potenz

$f(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, $n \geq 2$

ist auf

$D(f) := \{ z \in \mathbb{C} ;\ -\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{\pi}{n} \}$

injektiv: $w_1 = z_1^n$, $w_2 = z_2^n$

$\underbrace{w_1 = w_2}\ \overset{?}{\Rightarrow}\ z_1 = z_2$

$\Rightarrow 1 = \frac{|z_1|^n}{|z_2|^n} e^{in(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$ (falls $-\frac{\pi}{n} < \varphi_1, \varphi_2 < \frac{\pi}{n}$)

$$w = f^{-1}(z) = \sqrt[4]{r}\, e^{i\varphi/4}$$

für $z = re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

Komplexer Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion