Exkurs Komplexe Zahlen 150409

$z = x + iy \qquad \bar{z} := x - iy$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2+y^2}, \quad z \neq 0$$

und $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

als Tupel

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x^2+y^2}(x - iy)$$

$$= \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right).$$

Euler:

$z = |z| e^{i\varphi} \qquad \varphi = \arg z$

$w = |w| e^{i\chi} \qquad \chi = \arg w$

(1) Damit

$$z \cdot w = |z| e^{i\varphi} |w| e^{i\chi}$$

$$= |z||w| e^{i(\varphi+\chi)}$$

<u>Geometrisch:</u>

Längen von z und w werden multipliziert,

Argumente von z und w werden addiert.

Argumente $\in [0, 2\pi)$!

Komplexe Funktionen

Eine Abb.

$$f : \mathbb{C} \supset D \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto f(z)$$

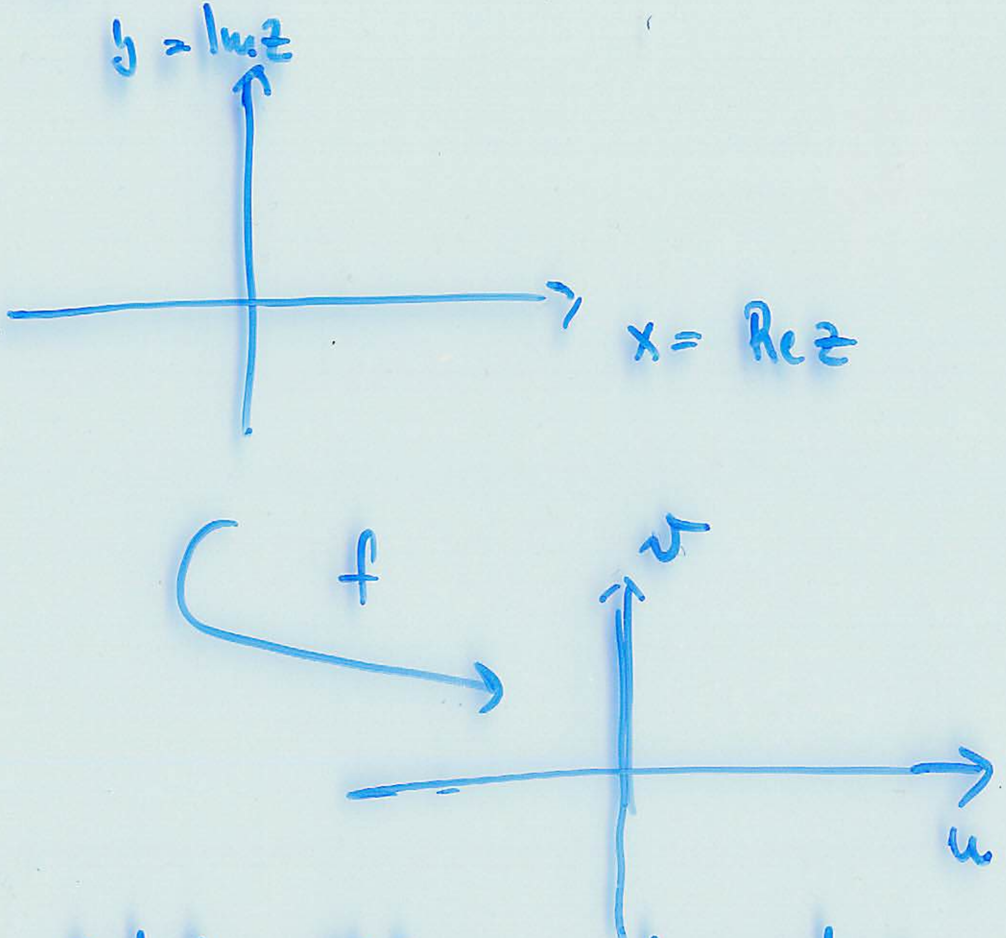
heißt komplexe Funktion

D = Definitionsbereich von f

$$W = \{ w \in \mathbb{C};\ \exists z \in D : f(z) = w \}$$

Wertebereich von f

$$z = x + iy = (x,y) \longmapsto f(z) = u(z) + i\,v(z) = (u(z), v(z))$$



Zentrales Anliegen: Geometrie von komplexen Funktionen

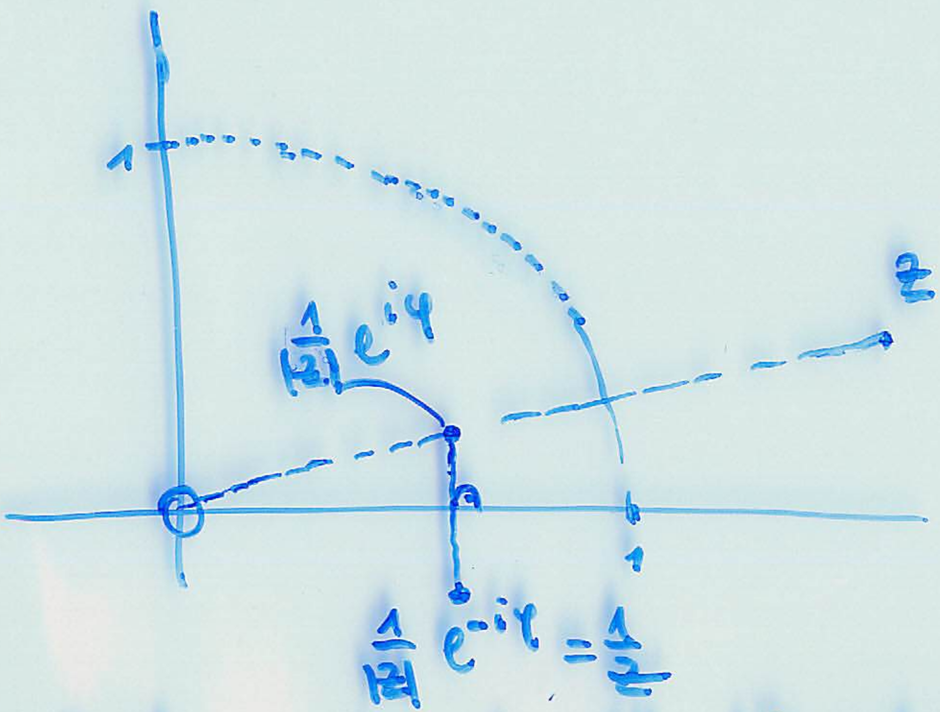
Bsp: $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$

150109

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|} e^{-i\varphi},$$

falls $z = |z| e^{i\varphi}$

Geometrisch:



i) Bilde $w' = \frac{1}{|z|} e^{i\varphi}$ ("Spiegeln" am Einheitskreis)

③

ii) Konjugiere w', d.h. spiegle w' an der reellen Achse

$$z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Potenzreihen im Komplexen

Konvergenz in $\mathbb{C}$:

$$z_n \longrightarrow z \quad \text{in } \mathbb{C}$$

gdw $|z - z_n| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

gdw $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ in $\mathbb{R}^2$,

wobei $z_n = x_n + i y_n$, $z = x + iy$

Analog für Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$$

150409

Hier $a_k \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben, $z \in \mathbb{C}$. Damit

$$S_n = S_n(z)$$

$\Rightarrow$ Konvergenzkriterien von Reihen sind anwendbar, denn

$$|S_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, |z-z_0|^k$$

z.Bsp. Quotientenkriterium

$a_k \neq 0$ $k \geq k_0$, $\underbrace{\lim \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}}_{=:R}$ existiert.

Dann konvergiert $(S_n(z))_n$ für alle z mit $|z-z_0| < R$

(4) Siehe Kapitel Potenzreihen in Bärwolff, S. 210.

<u>Daher</u>: Konvergenzbereiche von Potenzreihen sind Kreise in $\mathbb{C}$ (hier mit Radius R um z_0).

<u>Bsp</u>: $p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ $(= e^z)$

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}, \quad z_0 = 0$$

$$R = \lim_{k \to \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k \to \infty} (k+1) = \infty$$

$\Rightarrow$ Konvergenz in ganz $\mathbb{C}$.

150409

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i)^k}{k+1} \left(z-(2+2i)\right)^k$$

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|(2i)^k| \, (k+2)}{(k+1)\,|(2i)^{k+1}|}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|2i|} \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{2}$$

Untersuche (einen) Randpunkt(e)

$z = 2 + 2.5i$

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i)^k}{k+1} (0.5i)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$ konvergent nach Leibniz Kriterium.

(5) Definition elementarer Funktionen über Potenzreihen

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Hyperbelfunktionen

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$