6 Komplexe Integration

Ziel: Berechne für komplexe Funktion $f : D \to W \subset \mathbb{C}$ Integral der Form

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = ?$$

wobei $\Gamma \subset D \subset \mathbb{C}$ ein Weg im Definitionsbereich von f.

Fragen:

- Wie ist ein solches `komplexes Integral` sinnvollerweise zu definieren?
- Wie sind komplexe Integrale der obigen Form *einfach* zu berechnen?
- Für welche Funktionen f kann man das Integral *einfach* bestimmen?
- Wie hängt der Wert des komplexen Integrals vom Weg Γ ab?
- Kann man eine komplexe Funktion mittels komplexer Integration darstellen?

6.1 Definition und Berechnung komplexer Integrale

Ausgangspunkt:

- Sei $f : D \to W$ eine komplexe Funktion mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$;
- Sei $\Gamma \subset D$ eine beschränkte orientierte Kurve mit Parametrisierung

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \in D \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

wobei $z(\alpha)$ Anfangspunkt und $z(\beta)$ Endpunkt der Kurve Γ.

- Nun zerlegen wir Γ in n Teilkurven, jeweils durch Anfangs- und Endpunkte

$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), z_2 = z(t_2), \ldots, z_{n-1} = z(t_{n-1}), z_n = z(t_n),$$

definiert, wobei $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$.

- Mit $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $0 \leq k \leq n-1$, bilden wir die Partialsumme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k \qquad \text{für } \zeta_k \in \Gamma\big|_{[z_k, z_{k+1}]}$$

Definition komplexer Kurvenintegrale.

- Nun verfeinern wir die Zerlegung, so dass $\max_{0\leq k<n} |\Delta z_k| \to 0$ für $n \to \infty$.
- Betrachte die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} S_n = ?$

Definition: *Falls für jede Zerlegungsfolge $z_0, \ldots, z_n$ für Γ mit*

$$\max_{0\leq k<n} |\Delta z_k| \to 0 \qquad \textit{für } n \to \infty$$

und für jede Wahl von Zwischenpunkten $\zeta_k \in \Gamma\big|_{[z_k, z_{k+1}]}$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} S_n$ der Partialsummen S_n jeweils existiert und stets denselben Wert ergibt, so wird der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k =: \int_\Gamma f(z)\, dz$$

als das `Integral der Funktion f längs der Kurve Γ` *bezeichnet.*
In diesem Fall spricht man von einem `komplexen Kurvenintegral`, f *heißt* `Integrand` *und* Γ *heißt* `Integrationsweg`. □

Bemerkungen zu komplexen Kurvenintegralen.

- Ist f reellwertig auf der reellen Achse und ist $\Gamma = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall der reellen Achse, so stimmt das komplexe Kurvenintegral mit dem entsprechenden Riemannschen Integral überein:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

- Das komplexe Kurvenintegral exisitiert unter den folgenden Bedingungen.

(a) f ist stückweise stetig längs Γ;

(b) Γ besitzt eine Parametrisierung $z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, die stückweise stetig differenzierbar ist, so dass $z'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$.

Geometrische Interpretation von (b):

Die Tangente der Kurve Γ variiert stetig längs Γ bis auf endlich viele `Knickstellen`, d.h. Γ ist stückweise glatt.

- Im folgenden setzen wir die Bedingungen (a) und (b) stets voraus.

Beispiel. Wir berechnen das Integral $\int_\Gamma z\,dz$, wobei

- Γ der im positiven Sinn einmal durchlaufene Einheitkreisrand.
- Verwenden mit $q = e^{2\pi i/n}$ die $n+1$ Punkte

$$z_k = q^k \qquad 0 \le k \le n$$

zur Zerlegung von Γ sowie die Zwischenpunkte $\zeta_k = z_k$.

- Für die n-te Partialsumme bekommen wir

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_k(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k(q^{k+1} - q^k) \\ &= (q-1)\sum_{k=0}^{n-1} q^{2k} = (q-1)\sum_{k=0}^{n-1} (q^2)^k \end{aligned}$$

und somit

$$S_n = (q-1)\frac{q^{2n}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2n}-1}{q+1}$$

Wegen $q^{2n} = e^{4\pi i} = 1$ folgt $S_n = 0$ für alle n und somit $\int_\Gamma z\,dz = 0$. $\square$

Noch ein Beispiel. Wir berechnen nun das Integral $\int_\Gamma \overline{z}\,dz$, wobei

- Γ erneut der im positiven Sinn einmal durchlaufene Einheitkreisrand.
- Mit der gleichen Zerlegung und den gleichen Zwischenpunkten bekommen wir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{q}^k (q^{k+1} - q^k)$$

für die Partialsummen. Mit $\overline{q} = e^{-2\pi i/n} = 1/q$ folgt somit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q-1) = n(q-1) = n(e^{2\pi i/n} - 1).$$

Mit der Substitution $\ell = 2\pi i/n$ berechnen wir nun den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n(e^{2\pi i/n} - 1) = \lim_{\ell\to 0} \frac{2\pi i}{\ell}(e^\ell - 1) = 2\pi i \lim_{\ell\to 0} \frac{e^\ell - 1}{\ell} = 2\pi i.$$

Somit gilt

$$\int_\Gamma \overline{z}\,dz = 2\pi i.$$

Ein weiteres Beispiel.

Wir berechnen nun das Integral

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$$

wobei Γ wieder der im positiven Sinn einmal durchlaufene Einheitkreisrand.

Beachte, dass für jeden Punkt z auf dem Einheitskreisrand gilt

$$\overline{z} = \frac{1}{z} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = 1.$$

Somit bekommen wir unter Verwendung des vorigen Beispiels

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}.$$

$\square$

Zur einfacheren Berechnung komplexer Integrale.

Ziel: Reduziere Berechnung eines komplexen Integrals auf zwei reelle Integrale.

Start: Sei $f : D \to W$ eine stetige komplexe Funktion. Der Integrationsweg Γ besitze Parametrisierung

$$\Gamma : t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t) \qquad \text{für } \alpha \le t \le \beta$$

Weiterhin: Zerlegung des Parameterintervalls $[\alpha, \beta]$ mit Parametern

$$t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

liefert entsprechende Zerlegung von Γ mit Teilpunkten

$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), \ldots, z_{n-1} = z(t_{n-1}), z_n = z(t_n).$$

Setze

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k \qquad \text{und} \qquad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$$

für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Zur einfacheren Berechnung komplexer Integrale.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Delta z_k = z_{k+1} - z_k &= z(t_{k+1}) - z(t_k) \\
&= [x(t_{k+1}) - x(t_k)] + i[y(t_{k+1}) - y(t_k)] \\
&= [x'(t_k) + iy'(t_k)]\Delta t_k + \Phi_k \\
&= z'(t_k)\Delta t_k + \Phi_k
\end{aligned}$$

mit $\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_k}{\Delta t_k} = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Mit den Zwischenpunkten $\zeta_k = z(t_k) = z_k$ bekommen wir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(z(t_k))[z'(t_k)\Delta t_k + \Phi_k]$$

für die n-ten Partialsummen mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\, dt.$$

Rezept zur Berechnung eines komplexen Integrals.

Aufgabe: Berechne komplexes Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$

Lösungsweg:

(a) Stelle den Integrationsweg Γ in Parameterform dar

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \le t \le \beta$$

(b) Substituiere im Integral $z = z(t)$, somit $dz = z'(t)\,dt$;

(c) Ersetze den Integrationsweg Γ durch die reellen Grenzen α und β.

(d) Berechne das Integral

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.$$

□

Beispiel.

Wir berechnen nun erneut das Integral

$$\int_\Gamma z\,dz$$

über den im positiven Sinn einmal durchlaufenen Einheitskreisrand Γ.

- Wähle als Parametrisierung

$$\Gamma : t \mapsto z(t) = e^{it} \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

- Dann gilt $dz = z'(t)dt = ie^{it}dt$ und somit

$$\int_\Gamma z dz = \int_0^{2\pi} e^{it} ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{2it}\,dt = \frac{1}{2}e^{2it}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(e^{4\pi i} - e^0\right) = 0$$

$\square$

Weitere Beispiele.

Wir berechnen nun erneut die Integrale

$$\int_\Gamma \overline{z}\,dz \qquad \text{und} \qquad \int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz$$

jeweils über den im positiven Sinn einmal durchlaufenen Einheitskreisrand Γ.

Mit der gleichen Parametrisierung wie im vorigen Beispiel ergibt sich für das erste Integral

$$\int_\Gamma \overline{z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi i$$

und für das zweite Integral bekommt man entsprechend den Wert

$$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi i.$$

$\square$

Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals.

- Additivität bezüglich des Integranden.

  Für zwei komplexe Funktionen f und g gilt

$$\int_\Gamma (f(z)+g(z))\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_\Gamma g(z)\,dz.$$

- Homogenität bezüglich des Integranden.

  Für eine komplexe Funktionen f und eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int_\Gamma cf(z)\,dz = c\int_\Gamma f(z)\,dz.$$

- Additivität bezüglich des Integrationsweges. Seien Γ_1 und Γ_2 zwei Kurven, wobei der Endpunkt von Γ_1 mit dem Anfangspunkt von Γ_2 übereinstimmt. Dann gilt für die zusammengesetzte Kurve $\Gamma_1 + \Gamma_2$

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Weitere Eigenschaften des komplexen Integrals.

- Homogenität bezüglich des Integrationsweges.

  Sei $-\Gamma$ die zu Γ in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Kurve. Dann gilt

$$\int_{-\Gamma} f(z)\, dz = -\int_{\Gamma} f(z)\, dz.$$

- Obere Schranke für den Betrag des Integrals.

  Sei L die Länge der Kurve Γ. Dann gilt die Standardabschätzung

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)\, dz \right| \leq L \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$$

Beweis: Mit $M = \max_{z \in \Gamma} |f(z)|$ gilt die Abschätzung

$$|S_n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k| \leq ML$$

für die n-te Partialsumme und somit $|S_n| \leq ML$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ folgt die Behauptung. ■

6.2 Integrale analytischer Funktionen

Grundvoraussetzung:

- $f : D \longrightarrow W$ sei analytisch.

Weitere Voraussetzung:

- Das Definitionsgebiet D von f sei offen und einfach zusammenhängend.

Weitere Begriffe:

- Der Integrationsweg Γ heißt geschlossen, falls Anfangs- und Endpunkt von Γ übereinstimmen.

- Γ heißt einfach geschlossen, falls die Kurve Γ keine Schnittpunkte besitzt, d.h. für alle Parameter t_1, t_2, $t_1 \neq t_2$, einer beliebigen Parametrisierung

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta$$

von Γ gilt $z(t_1) \neq z(t_2)$, d.h. $z(t)$ ist injektiv. □

Der Cauchysche Integralsatz.

Satz (Cauchyscher Integralsatz)**:**
Sei f *analytisch auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet* G*. Dann gilt für jede geschlossene Kurve* $\Gamma \subset G$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0,$$

d.h. das Integral von f *längs jeder geschlossenen Kurve in* G *ist Null.*

Beweis: Sei $\Gamma \subset G$ geschlossen mit Parametrisierung

$$\Gamma : t \mapsto z(t) \qquad \text{für } \alpha \leq t \leq \beta$$

Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt.$$

Beweis des Cauchyschen Integralsatzes.

Mit den üblichen Darstellungen

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad \text{und} \qquad f(z) = u(z) + iv(z)$$

erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta [u(z(t)) + iv(z(t))][x'(t) + iy'(t)]\,dt \\
&= \int_\alpha^\beta [u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)]dt \\
&\quad + i\int_\alpha^\beta [v(z(t))x'(t) + u(z(t))y'(t)]dt
\end{aligned}$$

bzw. es gilt die Darstellung

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma (udx - vdy) + i\int_\Gamma (vdx + udy),$$

des komplexen Kurvenintegrals durch zwei reelle Kurvenintegrale.

Fortsetzung des Beweises.

Im folgenden zeigen wir, dass die reellen Kurvenintegrale jeweils verschwinden.

O.E. nehmen wir Γ dabei als einfach geschlossen und positiv orientiert an.

Mit dem Greenschen Satz (Analysis III) gilt für das ebene Vektorfeld $\mathbf{p} = (u, -v)$

$$\int_\Gamma (u dx - v dy) = \int_\Omega \operatorname{rot}(\mathbf{p}) \, dx \, dy$$

wobei Ω das von Γ eingeschlossene Gebiet bezeichnet, d.h. $\partial\Omega = \Gamma$, und wobei

$$\operatorname{rot}(\mathbf{p}) = \frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -v_x - u_y .$$

Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, insbesondere $u_x = v_y$, verschwindet die Rotation von $\mathbf{p}$, d.h. es gilt $\operatorname{rot}(\mathbf{p}) = 0$, und somit

$$\int_\Gamma (u dx - v dy) = \int_\Omega \operatorname{rot}(\mathbf{p}) \, dx \, dy = 0.$$

Analog zeigt man, dass $\int_\Gamma (v dx + u dy) = 0$; somit insgesamt $\int_\Gamma f(z) \, dz = 0$. ■

Beispiele. Γ umlaufe den Einheitskreisrand einmal im positiven Sinn.

Beispiel 1: $f(z) = z$ ist analytisch auf ganz $\mathbb{C}$. Somit ist der Cauchysche Integralsatz anwendbar und es gilt

$$\int_\Gamma z \, dz = 0.$$

Beispiel 2: Für $f(z) = \bar{z}$ ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar, denn f ist in keinem Gebiet analytisch. Es gilt

$$\int_\Gamma \bar{z} \, dz = 2\pi i.$$

Beispiel 3: Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist analytisch in dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Allerdings ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend und somit ist der Cauchysche Integralsatz nicht anwendbar. Es gilt

$$\int_\Gamma \frac{1}{z} \, dz = 2\pi i.$$

$\square$