Aufgabe 1:

a) Man überprüfe, ob

(i) $f(z) = e^{z+\bar{z}}\,(\cos(i(\bar{z}-z)) - i\sin(i(z-\bar{z})))$

(ii) $g(z) = z^2 + 2|z| + 1$

holomorph (bzw. analytisch) auf ganz $\mathbb{C}$ ist.

b) Ist $\operatorname{Re}(z^2+1)$ harmonisch? (Mit Begründung!)

c) Man berechne

(i) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z+1}\,dz$ und

(ii) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z+1}\,dz.$

d) Man berechne die Taylor-Reihe um $z_0 = i$ von

$$f(z) = \int_i^z \frac{1}{3-\xi}\,d\xi$$

mit Konvergenzradius.

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die durch

$$f(z) = \frac{1}{z} + \cos\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

definierte Funktion.

(i) Man bestimme die Laurent-Reihe von f um $z_0 = 1$,

(ii) klassifiziere alle Singularitäten von f und berechne deren Residuen.

b) Man berechne unter Verwendung des Residuenkalküls die folgenden Integrale

(i) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^{5/2} + 13x^{3/2} + 36x^{1/2}}\,dx,$

(ii) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,dx.$