

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Für die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= \frac{1}{z^4 + z^2}, & \text{b) } f(z) &= \sin \frac{1}{z}, \\ \text{c) } f(z) &= \frac{z - \sin z}{z^2}, & \text{d) } f(z) &= \coth z \end{aligned}$$

bestimme man:

Lage und Art der (endlichen) Singularitäten, die zugehörigen Residuen und die ersten drei (nichtverschwindenden) Summanden der Laurentreihe um $z_0 = 0$, die für große z konvergiert.

Aufgabe 22:

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{20}{z^4 + 8z^3 + 20z^2 + 32z + 64}.$$

- Man bestimme mit Hilfe von Laurent-Reihenentwicklungen die Partialbruchzerlegung von f .
- Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\oint_c f(z) dz$$

für den Kreis $c : |z + 4 - 2i| = 5$.

Aufgabe 23:

Man berechne mit Hilfe des Residuenkalküls die Integrale

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 1}{x^6 + 2x^5 + 2x^4 - x^2 - 2x - 2} dx,$$

$$\text{b) } \int_0^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 + 4} dx \quad \text{und}$$

$$\text{c) } \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x^3 + 1)\sqrt{x^3 - 1}} dx .$$

Aufgabe 24:

Mittels Residuenkalkül berechne man die folgenden Integrale:

$$\text{a) } \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2 \cos \varphi} d\varphi ,$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi} \frac{1}{2 + \sin(2\varphi)} d\varphi .$$

Hinweis: Mit $z = e^{i\varphi}$ substituiere man $\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ bzw. $\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$.

Abgabetermin: 1.7.-3.7. (zu Beginn der Übung)