Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2008**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Gegeben sei das durch die beiden Kreise $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| = 1\}$ und $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 3\}$ berandete beschränkte Gebiet D (vgl. Aufgabe 12).

Man berechne eine auf D harmonische Funktion, die auf K_1 den Wert 1 und auf K_2 den Wert 2 annimmt.

Hinweis: Man transformiere das Problem, wie in Aufgabe 12 angegeben, löse das konform verpflanzte Problem in Polarkoordinaten und transformiere zurück.

Aufgabe 14:

Man berechne

a) $\displaystyle\int_0^1 (2+3it)^2 \, dt \,,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^2+1}{1+it} \, dt \,,$

c) $\displaystyle\int_{c_i} \operatorname{Im}(z) \, dz \,,$

dabei ist c_1 der geradlinige Weg, von $z_1 = 1$ nach $z_2 = i$. c_2 verbindet auch z_1 und z_2 , läuft jedoch auf dem Einheitskreis in mathematisch positivem Sinn.

d) Für den Einheitskreis $c(t) = e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$ berechne man

(i) $\displaystyle\oint_c \bar{z} dz \,,$

(ii) $\displaystyle\oint_c z^2 dz \,.$

Aufgabe 15:

Man berechne direkt und mit Hilfe einer Stammfunktion

a) $\int\limits_c z^3 + 4\,dz$ entlang des geradlinigen Weges von $1-i$ nach $1+i$,

b) $\int\limits_c z\cosh z\,dz$ für $c(t) = it$ mit $0 \le t \le 1$,

c) $\int\limits_{-i}^{i} \sin z\,dz$ für $c(t) = it$, $-1 \le t \le 1$,

d) $\int\limits_{1}^{i} \ln z\,dz$ für $c(\varphi) = e^{i\varphi}$ (positiv orientiert).

Aufgabe 16:

a) Man berechne die Taylorreihe von $f(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{4+\xi^2}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme den Konvergenzradius.

b) Man bestimme die Konvergenzradien der Taylor-Reihen folgender Funktionen zu den angegebenen Entwicklungspunkten z_0 , ohne die Reihen selbst zu berechnen:

(i) $f(z) = \frac{3}{z^2+2z+5}$, $z_0 = i$ und $z_0 = 0$,

(ii) $f(z) = \frac{2}{e^z - 1}$, $z_0 = 2\pi(1+i)$,

(iii) $f(z) = \frac{z}{\ln(3-2z)}$, $z_0 = 0$ und $z_0 = \frac{11}{8}$.

Abgabetermin: 3.6.-5.6. (zu Beginn der Übung)