

## Komplexe Funktionen für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 3

#### Aufgabe 9:

a) Man überprüfe, welche der folgenden Funktionen holomorph in  $\mathbb{C}$  sind:

- (i)  $f(z) = z^2 \cos z$ ,
- (ii)  $f(z) = \operatorname{Im}(z^3)$ ,
- (iii)  $f(z) = \exp(\bar{z})$ ,
- (iv)  $f(z) = z + \bar{z} + 1$ .

b) Man zeige, dass

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 + x + 1$$

harmonisch ist und konstruiere eine zu  $u$  konjugiert harmonische Funktion  $v(x, y)$ , d.h. eine Funktion  $v$ , für die die Funktion  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $z = x + iy$  holomorph wird.

#### Aufgabe 10:

Es sei  $z = re^{i\varphi}$  und  $g(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ .

a) Man zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten die Gestalt

$$ru_r = v_\varphi, \quad rv_r = -u_\varphi$$

besitzen.

b) Man zeige unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass  $g(z) = z^n$  für  $n \geq 1$  holomorph ist.

**Aufgabe 11:**

Gegeben seien die Kurven  $c_1(t) = it$  und  $c_2(t) = e^{it}$  jeweils für  $0 < t < \pi$ .

- a) Man skizziere die Kurven  $c_1$  und  $c_2$  in der  $z$ -Ebene und bestimme ihren Schnittpunkt mit Schnittwinkel.
- b) In welche Bildkurven der  $w$ -Ebene gehen  $c_1$  und  $c_2$  unter dem Hauptwert von  $w = \ln z$  über? Man überprüfe, ob im Schnittpunkt der Bildkurven der Winkel und das lokale Längenverhältnis erhalten bleiben.

**Aufgabe 12:**

- a) Man skizziere die beiden Kreise  $K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$  und  $K_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$  und berechne die beiden Punkte  $z_1$  und  $z_2$ , die symmetrisch zu beiden Kreisen liegen.
- b) Man bestimme alle konformen Funktionen

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit  $T(z_1) = 0$  und  $T(z_2) = \infty$ .

- c) Man skizziere das Bild von  $K_1$  und  $K_2$  unter  $T$ , wenn noch  $T(0) = 1$  gilt.

**Abgabetermin:** 20.5.-22.5 (zu Beginn der Übung)