Aufgabe 1) Bitte bewerten Sie folgende Aussagen. Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben "W" für wahr und "F" für falsch ein. Für jede vollständig richtig bewertete Teilaufgabe a)-e) erhalten Sie zwei Punkte. Sofern eine Teilaufgabe nicht vollständig richtig bewertet wurde (eine oder mehrere falsche Bewertungen bzw. keine Bewertung) erhalten Sie Null Punkte für diese Teilaufgabe.

Gegeben sei die Abbildung

$$T : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad T(z) := \frac{2z}{z+i}.$$

a) Bewerten Sie die folgenden Aussagen:

- $\boxed{\text{w}}$ T ist eine Möbiustransformation.
- $\boxed{\text{w}}$ Die Umkehrabbildung T^{-1} von T ist eine Möbiustransformation.
- $\boxed{\text{w}}$ $T^{-1}(w) = \frac{-wi}{w-2}$.
- $\boxed{\text{f}}$ $T^{-1}(w) = \frac{w+i}{2w}$.

b) Das Bild der imaginären Achse

- $\boxed{\text{w}}$ enthält den Ursprung $z_0 := 0$.
- $\boxed{\text{f}}$ enthält den Punkt $z_1 := 1 + i$.
- $\boxed{\text{f}}$ ist ein echter Kreis.
- $\boxed{\text{f}}$ ist die Gerade $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z)$.

c) Das Bild der reellen Achse

- $\boxed{\text{w}}$ enthält den Ursprung $z_0 := 0$.
- $\boxed{\text{w}}$ enthält den Punkt $z_1 := 1 + i$.
- $\boxed{\text{w}}$ ist ein echter Kreis.
- $\boxed{\text{f}}$ ist die Gerade $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z)$.

d) Das Bild des Quadranten

$$M := \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\,(z) < 0 \text{ und } \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$$

- $\boxed{\text{w}}$ liegt innerhalb des Quadranten $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\,(z) > 0 \text{ und } \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$.
- $\boxed{\text{f}}$ liegt innerhalb des Quadranten $\{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\,(z) > 0 \text{ und } \mathrm{Im}\,(z) < 0\}$.
- $\boxed{\text{f}}$ enthält die Kreisscheibe $|z - 1| < 1$.
- $\boxed{\text{f}}$ enthält die Punkte -1 und $-i$.

e) Welche Menge wird auf die Gerade $\text{Re}\,(w) = 1$ abgebildet? Das Urbild der Gerade $\text{Re}\,(w) = 1$

f	ist der Kreis $\vert z-1\vert = 1$.
f	ist eine Gerade.
w	enthält die Punkte $e^{\frac{\pi}{4}i}$ und $e^{-\frac{\pi}{4}i}$.
w	liegt außerhalb der Kreisscheibe $\vert z\vert \leq \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2)

Gegeben sei

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{(z-i)^2}\,.$$

a) Klassifizieren Sie die Singularitäten von f und bestimmen Sie die Residuen.

b) Berechnen Sie – sofern definiert – folgende Integrale, wobei die angegebenen Kreise einmal in mathematisch positiver Richtung durchlaufen werden sollen.

(i) $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} f(z)\,dz\,,$

(ii) $\displaystyle\oint_{|z+i|=2} f(z)\,dz\,,$

(iii) $\displaystyle\oint_{|z+i|=3} f(z)\,dz\,.$

c) Bestimmen Sie die ersten beiden Terme der Taylor–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. (D.h. bis zum linearen Term).

d) Bestimmen Sie die Laurent–Entwicklung von f zum Entwicklungspunkt $z_1 = i$, die in einer Umgebung des Entwicklungspunktes $z_1 = i$ konvergiert.

Hinweis : Additionstheorem von $\sin(z) = \sin[(z-i)+i]$.

Lösung)

a) Wege $sin(i) \neq 0$ ist $z_0 = i$ ein Pol zweiter Ordnung. Weitere Singularitäten gibt es nicht. [**1 Punkt**]

b) (i) $\displaystyle\oint_{|z+i|=1} f(z)\,dz = 0$ (CIS). [**1 Punkt**]

(ii) $\displaystyle\oint_{|z+i|=2} f(z)\,dz$ ist nicht definiert, da die Kurve den Punkt $z_0 = i$ durchläuft. [**1 Punkt**]

(iii) $$\oint_{|z+i|=3} f(z)\,dz \;=2\pi i\,Res(i)$$

$$Res(i) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left((z-i)^2\,\frac{\sin(z)}{(z-i)^2}\right)' = \cos(i) \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

$$\oint_{|z+i|=3} f(z)\,dz \;=2\pi i\,Res(i) = 2\pi i\,\cos(i)\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

c) $$f'(z) = \frac{\cos(z)(z-i)^2 - 2(z-i)\sin(z)}{(z-i)^4} \implies f'(0) = \frac{(-i)^2}{(-i)^4} = -1$$

$$T_1(z;0) = f(0) + f'(0)(z-0) = -z\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

d) [**3 Punkte**]

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-i)^2}\,\sin((z-i)+i) = \frac{1}{(z-i)^2}\,(\sin(z-i)\cos(i) + \cos(z-i)\sin(i)) \\ &= \frac{1}{(z-i)^2}\left(\cos(i)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-i)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sin(i)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-i)^{2k}}{(2k)!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cos(i)\frac{(z-i)^{2k-1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sin(i)\frac{(z-i)^{2k-2}}{(2k)!} \end{aligned}$$