Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2007**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Komplexe Funktionen
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2

Aufgabe 5: Berechnen Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i)\,z^3 \;=\; i\,, \qquad \text{bzw.} \qquad \cos(z) \;=\; 2i\,.$$

Hinweis zur zweiten Gleichung : zeigen Sie $\cos(z) = \cos(x)\,\cosh(y) - i\,\sin(x)\sinh(y)$

Aufgabe 6: Sei $c \in \mathbb{C}$ und $R \in \mathbb{R};\; R \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann die Äquivalenz

$$|z-c| = R \iff z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + c\bar{c} = R^2$$

gilt.

Welche Kurve wird folglich durch die Bedingung $\quad z\bar{z} - \frac{i}{2}\bar{z} + \frac{i}{2}z = 0 \quad$ beschrieben?

Aufgabe 7: Gegeben sei die Abbildung $w = f(z) := \dfrac{1}{z}$ mit $z \neq 0$.

a) Bestimmen Sie die Bilder

   (i) der Strahlen $\arg(z) = \varphi_0$,

   (ii) der Geraden $\mathrm{Re}(z) = x_0$,

   (iii) der Geraden $\mathrm{Im}(z) = y_0$.

b) Zeigen Sie, dass das Bild eines Kreises, der nicht durch Null geht, ein Kreis ist. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Bildkreises.

   Was ist folglich das Bild von $|z-2| = 1$?

c) Bestimmen Sie das Bild des Kreises $|z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$.

Hinweis: verwenden Sie Aufgabe 6.

Aufgabe 8:

a) Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Streifen $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Im}\, z \leq \pi\}$ auf den Keil $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\right\}$ abbildet.

b) Geben Sie eine Funktionsvorschrift an, die den Streifen $\left\{z \in \mathbb{C} : -\dfrac{\pi}{8} \leq \mathrm{Re}\, z \leq 0\right\}$ auf den Keil $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\right\}$ abbildet.

Hinweis: Exponentialfunktion!

Abgabetermin: 17.4.07 bzw. 19.4.2007