

Klausur Differentialgleichungen II

04. März 2025

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang:

AIW	CI	ET	GES/ES	IIW/IN	MB	MTB/MEC	SB	
-----	----	----	--------	--------	----	---------	----	--

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

Σ =

Aufgabe 1: [5 Punkte]

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + t \cdot u_x &= 1, & \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- a) Geben Sie die charakteristischen Gleichungen für dieses Problem an und bestimmen Sie deren Lösungen.
- b) Lösen Sie das Anfangswertproblem.

Lösung:

- a) Mit der Charakteristiken-Methode erhält man für

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} \text{ mit } \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \nu(t) := u(\gamma(t))$$

die charakteristischen Gleichungen

$$\dot{x}(t) = t, \quad x(0) = x_0, \quad \text{und} \quad \dot{\nu}(t) = 1, \quad \nu(0) = \nu_0.$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + x_0$$

Damit erhalten wir in der zweiten Gleichung

$$\nu(t) = t + \nu_0$$

- (b) Aus $x = \frac{t^2}{2} + x_0$ folgt

$$x_0 = x - \frac{t^2}{2}$$

und mit

$$\nu_0 = \nu(0) = u(x_0, 0) = \cos(x_0)$$

erhalten wir schließlich

$$u(x, t) = t + \cos\left(x - \frac{t^2}{2}\right).$$

Aufgabe 2: [6 Punkte]

Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x, t)$:

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2 & x \leq -2, \\ 0 & -2 < x \leq 1, \\ -1 & 1 < x. \end{cases}$$

- Berechnen Sie die physikalisch sinnvolle Lösung des Anfangswertproblems für $t \in [0, t^*)$ mit einem hinreichend kleinem t^* .
- Bis zu welchem t^* ist die Lösungsformel aus a) sinnvoll?
- Wie kann die Lösung physikalisch sinnvoll für $t > t^*$ fortgesetzt werden?

Lösung:

- An den zwei Sprungstellen der Anfangsdaten führen wir zwei Stoßwellen ein.

Die Sprungbedingung verlangt:

$$\dot{s}_1(t) = \frac{2+0}{2} = 1 \quad \text{und} \quad \dot{s}_2(t) = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Wir erhalten die Stoßfronten

$$s_1(t) = -2 + t \quad \text{und} \quad s_2(t) = 1 - \frac{t}{2}.$$

Für hinreichend kleine t ist

$$u(x, t) = \begin{cases} 2 & x \leq -2 + t, \\ 0 & -2 + t < x \leq 1 - \frac{t}{2}, \\ -1 & 1 - \frac{t}{2} < x. \end{cases} \quad (3 \text{ Punkte})$$

eine schwache Lösung.

- Für t^* mit

$$-2 + t^* = 1 - \frac{t^*}{2} \iff -4 + 2t^* = 2 - t^* \iff t^* = 2 \quad (1 \text{ Punkt})$$

treffen die Stoßfronten aufeinander und die Lösung aus a) wird mehrdeutig.

- Für $t^* = 2$ gilt $s_1(2) = s_2(2) = 0$ und

$$u(x, 2) = \begin{cases} 2 & x \leq 0, \\ -1 & x > 0. \end{cases}$$

Wir fügen eine neue Stoßfront s_3 mit $\dot{s}_3(t) = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$ ein.

$$s_3(t) = s_3(2) + \dot{s}_3(t)(t - 2) = 0 + \frac{t - 2}{2}$$

Für $t > 2$ erhalten wir

$$u(x, t) = \begin{cases} 2 & x \leq \frac{t-2}{2}, \\ -1 & x > \frac{t-2}{2}. \end{cases} \quad \textbf{(2 Punkte)}$$

Aufgabe 3: [6 Punkte],

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
u_{tt} - 9u_{xx} &= 0 & 0 < x < 2, \quad 0 < t, \\
u(x, 0) &= 5 \sin(2\pi x) + 7 \sin(3\pi x) & 0 \leq x \leq 2, \\
u_t(x, 0) &= 9 \sin(\pi x) & 0 \leq x \leq 2, \\
u(0, t) &= 0 & 0 \leq t, \\
u(2, t) &= 0 & 0 \leq t.
\end{aligned}$$

Lösung:Mit $L = 2$ und $c = +\sqrt{9}$ lautet die Lösungsformel:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Also

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{3k\pi}{2}t\right) + B_k \sin\left(\frac{3k\pi}{2}t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right). \quad (1 \text{ Punkt})$$

Für $t = 0$ also

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \stackrel{!}{=} 5 \sin(2\pi x) + 7 \sin(3\pi x)$$

Also $A_4 = 5$, $A_6 = 7$ und $A_k = 0$ sonst. (2 Punkte)

$$u_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-A_k \cdot \frac{3k\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{3k\pi}{2}t\right) + B_k \cdot \frac{3k\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{3k\pi}{2}t\right) \right] \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$$

und für $t = 0$:

$$u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k\pi}{2} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \stackrel{!}{=} 9 \sin(\pi x)$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$B_k = 0, \quad \forall k \neq 2,$$

$$3\pi \cdot B_2 \stackrel{!}{=} 9 \implies B_2 = \frac{3}{\pi} \text{ sonst.} \quad (2 \text{ Punkte})$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= A_4 \cos\left(\frac{12\pi}{2}t\right) \sin\left(\frac{4\pi}{2}x\right) + A_6 \cos\left(\frac{18\pi}{2}t\right) \sin\left(\frac{6\pi}{2}x\right) + B_2 \sin\left(\frac{6\pi}{2}t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{2}x\right) \\
&= 5 \cos(6\pi t) \sin(2\pi x) + 7 \cos(9\pi t) \sin(3\pi x) + \frac{3}{\pi} \sin(3\pi t) \sin(\pi x). \quad (1 \text{ Punkt})
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: [3 Punkte]

Es seien $\tilde{u}$ und $\hat{u}$ Lösungen der Differentialgleichung

$$u_t - u_{xx} + u = 2, \quad x \in (0, 1), t \in \mathbb{R}^+,$$

für $u(x, t)$, die den Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

genügen.

- a) Ist dann auch $\tilde{u} + \hat{u}$ eine Lösung der Differentialgleichung?
Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Erfüllt $\tilde{u} - \hat{u}$ die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$u_t - u_{xx} + u = 0, \quad x \in (0, 1), t \in \mathbb{R}^+,$$

und die Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R}^+?$$

Lösung:

- a) Nein. Die Differentialgleichung ist zwar linear aber nicht homogen. Für $v := \tilde{u} + \hat{u}$ erhält man

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} + v &= (\tilde{u}_t + \hat{u}_t) - (\tilde{u}_{xx} + \hat{u}_{xx}) + \tilde{u} + \hat{u} \\ &= (\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}) + (\hat{u}_t - \hat{u}_{xx} + \hat{u}) = 2 + 2 \neq 2. \end{aligned}$$
- b) Nein. $\tilde{u} - \hat{u}$ erfüllt zwar die zugehörige homogene Differentialgleichung (Nachweis analog zu Teil a)), aber nicht die inhomogene Randbedingung:

$$(\tilde{u} - \hat{u})(1, t) = \tilde{u}(1, t) - \hat{u}(1, t) = \sin(t) - \sin(t) = 0.$$