Fachbereich Mathematik **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. J. Behrens

Klausur Differentialgleichungen II

04. März 2024

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:	AIW	CI	ET	GES/ES	IIW/IN	MB	MTB/MEC	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1: [7 Punkte]

Gegeben ist die folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 4 & x \leq -1, \\ 0 & -1 < x \leq 0, \\ -4 & 0 < x\,. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Entropielösung für $t \in [0, t^*)$ mit einem hinreichend kleinem t^*.

b) Bis zu welchem t^* kann die Lösung aus a) maximal fortgesetzt werden?

c) Geben Sie die Entropielösung für $t > t^*$ an.

Lösung:

a) An den zwei Sprungstellen der Anfangsdaten führen wir zwei Stoßwellen ein.
Die Sprungbedingung verlangt:
$\dot{s}_1(t) = \dfrac{4+0}{2} = 2 \qquad \text{und} \qquad \dot{s}_2(t) = \dfrac{0-4}{2} = -2\,.$
Wir erhalten die Stoßfronten
$s_1(t) = -1 + 2t \qquad$ und $s_2(t) = -2t\,.$
Für hinreichend kleine t ist

$$u(x,t) = \begin{cases} 4 & x \leq -1+2t, \\ 0 & -1+2t < x \leq -2t, \\ -4 & -2t < x\,. \end{cases} \qquad \textbf{(3 Punkte)}$$

eine schwache Lösung.

b) Für t^* mit
$-1 + 2t^* = -2t^* \iff 4t^* = 1 \iff t^* = \frac{1}{4}$ **(1 Punkt)**
treffen die Stoßfronten aufeinander und die Lösung aus a) wird mehrdeutig.

c) Füt $t^* = \frac{1}{4}$ gilt $s_1(t) = s_2(t) = -\frac{1}{2}$ und

$$u(x, \frac{1}{4}) = \begin{cases} 4 & x \leq -\frac{1}{2}\,, \\ -4 & x > -\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Wir fügen eine s_3 neue Stoßfront mit $\dot{s}_3(t) = \frac{4+(-4)}{2} = 0$ ein.

$$s_3(t) = -\frac{1}{2} + \dot{s}_3(t)(t - \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$$

Für $t > \frac{1}{4}$ gilt

$$u(x,t) = \begin{cases} 4 & x \leq -\frac{1}{2}, \\ -4 & x > -\frac{1}{2}. \end{cases} \qquad \textbf{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 2) [3 Punkte]

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung für $u(x,y)$:

$$x \cdot u_{xx} - (x+y)u_{xy} + y \cdot u_{yy} = 0.$$

Geben Sie die Ordnung der Differentialgleichung an und bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch) in den Punkten

$\binom{x_1}{y_1} = \binom{1}{1}$ und $\binom{x_2}{y_2} = \binom{1}{-1}$.

Lösung:

Die Differentialgleichung hat die Ordnung zwei. **(1 Punkt)**

Der typ wird vom Vorzeichen von

$D(x,y) = x \cdot y - \frac{(x+y)^2}{2^2} = -\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{4} = -\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

bestimmt.

Die Differentialgleichung ist $\begin{cases} \text{elliptisch} & \text{falls } D(x,y) > 0, \\ \text{parabolisch} & \text{falls } D(x,y) = 0, \\ \text{hyperbolisch} & \text{falls } D(x,y) < 0. \end{cases}$

$D(1,1) = 1 \cdot 1 - \frac{(1+1)^2}{2^2} = 0 \Longrightarrow$ Die Differentialgleichung ist

in $\binom{x_1}{y_1} = \binom{1}{1}$ parabolisch.

$D(1,-1) = 1 \cdot (-1) - \frac{(1-1)^2}{2^2} = -1 \Longrightarrow$ Die Differentialgleichung ist

in $\binom{x_2}{y_2} = \binom{1}{-1}$ hyperbolisch.

(2 Punkte)

Aufgabe 3: [**4 Punkte**]

Sei u eine in der Kreisscheibe $\Omega := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 25\}$ harmonische Funktion mit vorgegebenen Werten $g(x, y)$ auf dem Rand der Kreisscheibe. Also

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \qquad \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 25 \\ u(x,y) &= g(x,y) \qquad \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25. \end{aligned}$$

Für die folgenden zwei Fälle kann man jeweils eine Lösung ohne lange Rechnung angeben. Finden Sie die Lösungen und begründen Sie Ihre Antworten.

a) $g(x,y) = \dfrac{x + y + 18}{9}$.

b) $g(x,y) = 2x^2 + 2y^2$.

Lösung:

a) Die Funktion $u(x,y) = \dfrac{x + y + 18}{9} = g(x,y)$ löst die Potentialgleichung in der ganzen Kreisscheibe. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist $u(x,y) = \dfrac{x + y + 18}{9}$ die eindeutige Lösung in Ω.

(2 Punkte)

b) $g(x,y) = 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2)$ ist auf dem Rand $\partial\Omega$ konstant gleich 50.
$u(x,y)$ ist also konstant auf dem Rand von Ω. Da Maximum und Minimum von u in $\bar{\Omega}$, auf dem Rand angenommen , ist u in der ganzen Kreisscheibe konstant $u(x,y) = 50$.

(2 Punkte)

Aufgabe 4: [6 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - 36u_{xx} &= 0 && 0 < x < 2\pi\,,\ 0 < t\,,\\
u(x,0) &= 20\sin(\tfrac{3}{2}x) && 0 \le x \le 2\pi,\\
u_t(x,0) &= 24\sin(3x) && 0 \le x \le 2\pi,\\
u(0,t) &= 0 && 0 \le t,\\
u(2\pi,t) &= 0 && 0 \le t.
\end{aligned}
$$

Lösung:

Mit $L = 2\pi$ und $c^2 = +\sqrt{36}$ lautet die Lösungsformel:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(\frac{ck\pi}{L} t\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi}{L} t\right)\right] \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

Also

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(3kt) + B_k \sin(3kt)\right] \sin\left(\frac{k}{2} x\right). \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Für $t = 0$ also

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k}{2} x\right) \stackrel{!}{=} 20\sin(\frac{3}{2}x)$$

Also $A_3 = 20$ und $A_k = 0$ sonst. **(2 Punkte)**

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-A_k \cdot 3k \cdot \sin(3kt) + B_k \cdot 3k \cdot \cos(3kt)\right] \sin\left(\frac{k}{2} x\right)$$

und für $t = 0$:

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} 3kB_k \sin\left(\frac{k}{2} x\right) \stackrel{!}{=} 24\sin(3\pi x)$$

Also $3 \cdot 6 \cdot B_6 \stackrel{!}{=} 24$ und $B_k = 0$ sonst. **(2 Punkte)**

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= A_3 \cos(3\cdot 3t)\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + B_6 \sin(3\cdot 6t)\sin\left(\frac{6}{2}x\right)\\
&= 20\cos(9t)\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{4}{3}\sin(18t)\sin(3x) \qquad \textbf{(1 Punkt)}
\end{aligned}
$$