Fachbereich Mathematik **WiSe 2023/24**
Prof. Dr. J. Behrens

Klausur Differentialgleichungen II

04. März 2024

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	CI	ET	GES/ES	IIW/IN	MB	MTB/MEC	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$$\sum =$$

Aufgabe 1: [7 Punkte]

Gegeben ist die folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 4 & x \leq -1, \\ 0 & -1 < x \leq 0, \\ -4 & 0 < x\,. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Entropielösung für $t \in [0, t^*)$ mit einem hinreichend kleinem t^*.

b) Bis zu welchem t^* kann die Lösung aus a) maximal fortgesetzt werden?

c) Geben Sie die Entropielösung für $t > t^*$ an.

Aufgabe 2) [3 Punkte]

Gegeben ist die folgende Differentialgleichung für $u(x,y)$:

$$x \cdot u_{xx} \; - \; (x+y)u_{xy} \; + \; y \cdot u_{yy} \; = \; 0.$$

Geben Sie die Ordnung der Differentialgleichung an und bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch) in den Punkten

$\binom{x_1}{y_1} = \binom{1}{1}$ und $\binom{x_2}{y_2} = \binom{1}{-1}$.

Aufgabe 3: [4 Punkte]

Sei u eine in der Kreisscheibe $\Omega := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 25\}$ harmonische Funktion mit vorgegebenen Werten $g(x, y)$ auf dem Rand der Kreisscheibe. Also

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \qquad \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 25 \\ u(x,y) &= g(x,y) \qquad \text{für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25. \end{aligned}$$

Für die folgenden zwei Fälle kann man jeweils eine Lösung ohne lange Rechnung angeben. Finden Sie die Lösungen und begründen Sie Ihre Antworten.

a) $g(x, y) = \dfrac{x + y + 18}{9}$.

b) $g(x, y) = 2x^2 + 2y^2$.

Aufgabe 4: [6 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - 36u_{xx} &= 0 && 0 < x < 2\pi\,,\ 0 < t\,,\\
u(x,0) &= 20\sin(\tfrac{3}{2}x) && 0 \le x \le 2\pi,\\
u_t(x,0) &= 24\sin(3x) && 0 \le x \le 2\pi,\\
u(0,t) &= 0 && 0 \le t,\\
u(2\pi,t) &= 0 && 0 \le t.
\end{aligned}
$$