Aufgabe 1:

a) Man löse das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = 5 - x\,,$$

zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem die differenzierbare Lösung existiert.

Hinweis: Dabei dürfen die implizite Lösungsdarstellung für u und die allgemeine Darstellung der Grundcharakteristiken verwendet werden.

b) Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Viertelkreisring

$$\begin{aligned} r^2u_{rr} + ru_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \quad &\text{für} \quad 1 < r < 2 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\,, \\ u(r,0) = 0 \quad \text{und} \quad u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad &\text{für} \quad 1 \le r \le 2\,, \\ u(1,\varphi) = 0 \quad \text{und} \quad u(2,\varphi) = \sin(6\varphi) \quad &\text{für} \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

und bestimme deren maximalen und minimalen Funktionswert.

Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

Aufgabe 2:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fourier-Methode:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + (25t - 125)\sin(5\pi x)\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < 1 \quad \text{und} \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0\,, \quad u(1,t) = 0\,, \quad \text{für} \quad t \ge 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, \quad u_t(x,0) = x(x-1)\,, \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 1\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.