Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Behrens

SoSe 2023

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)

05.09.2023

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		
5		

$\sum =$

Aufgabe 1) (6 Punkte)

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) + 2y(t) - t\,y(t)^4 = 0.$$

Lösung 1:

Die Differentialgleichung ist Bernoullisch.

Mit $\alpha = 4, a = 2$ und $b = t$ und $u = y^{1-\alpha} = y^{-3}$ erhält man für u die lineare Differentialgleichung

$$u'(t) - 6u(t) = -3t. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

$u_h' = 6u_h \implies \frac{du_h}{dt} = 6u_h \implies \frac{du_h}{u_h} = 6dt \implies \ln(|u_h|) = 6t + k$

$\implies u_h(t) = Ce^{6t}.$ **(2 Punkte)**

Ansatz für eine partikuläre Lösung:

Variante 1) Spezieller Ansatz

$u_p(t) = k_1 + k_2 t \xrightarrow{\text{Dgl}} k_2 - 6k_1 - 6k_2 t \stackrel{!}{=} -3t$

Koeffizientenvergleich ergibt $k_2 = \frac{1}{2}$ und $k_1 = \frac{1}{12}$.

Variante 2) Variation der Konstanten

$u_p(t) = C(t)e^{6t} \xrightarrow{\text{Dgl}} \dot{C}(t)e^{6t} \stackrel{!}{=} -3t$

$$C(t) = \int -3te^{-6t}dt = \left[-3t\frac{e^{-6t}}{-6}\right] - \int -3\frac{e^{-6t}}{-6}dt = \frac{t}{2}e^{-6t} - \frac{1}{2}\int e^{-6t}dt$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{12}\right)e^{-6t} + K.$$

Also zum Beispiel mit $K = 0$

$u_p(t) = C(t)e^{6t} = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{12}\right)e^{-6t} \cdot e^{6t}$.

$\implies u_p(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{12}.$ **(2 Punkte)**

Insgesamt also

$$u(t) = Ce^{6t} + \frac{t}{2} + \frac{1}{12}$$

und

$$y(t) = \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{u}} \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Schreiben Sie folgende Anfangswertaufgabe in eine äquivalente Anfangswertaufgabe für ein System erster Ordnung um

$$y'''(x) - y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0\,, \qquad y(1) = 1,\, y'(1) = 4,\, y''(1) = 9.$$

Lösung: (2 punkte)

Umstellen der Differentialgleichung ergibt

$$y'''(x) = y''(x) - 2y'(x) + 3y(x).$$

Wir definieren nun

$$\boldsymbol{y}\,(t) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \boldsymbol{y}\,' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$$

Also

$$y_1' = y_2, \qquad y_2' = y_3, \qquad y_3' = y''' = y_3 - 2y_2 + 3y_1\,.$$

Die äquivalente Anfangswertaufgabe für ein System erster Ordnung lautet also

$$\boldsymbol{y}\,' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}\,(1) = \begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \\ y_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y &= h(x) \qquad x \in \,]0,1[\\ \alpha y(0) - y'(0) &= \gamma_1 \\ y(1) &= \gamma_2 \qquad \alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[0,1]$ stetige Funktionen $h(x)$ eindeutig lösbar?

Lösung:

Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda = 2\,.$$

Die Funktionen

$$y_1(x) = e^{2x}\,, \qquad y_2(x) = xe^{2x}. \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

bilden ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Es gilt $y_1'(x) = 2e^{2x}$, $y_2'(x) = (1+2x)e^{2x}$ und

$$\begin{aligned} R_1(y_1) &= \alpha y_1(0) - {y_1}'(0) = \alpha - 2\,, \\ R_1(y_2) &= \alpha y_2(0) - {y_2}'(0) = -1\,, \\ R_2(y_1) &= y_1(1) = e^2\,, \\ R_2(y_2) &= y_2(1) = e^2\,. \end{aligned}$$

Die RWA ist genau dann für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und alle stetigen h eindeutig lösbar, wenn die Matrix

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & -1 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix}$$

regulär ist. Also genau dann, wenn

$$(\alpha - 2)e^2 + e^2 = e^2(\alpha - 1) \neq 0 \iff \alpha \neq 1. \qquad \textbf{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 4: (2 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t^2} & \frac{3}{2t} \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) + \begin{pmatrix} t^3 \\ 2t^2 \end{pmatrix}, \qquad t \geq 1.$$

Die Funktionen

$$\boldsymbol{y}^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{y}^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

sind Lösungen des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems.

Bilden $\boldsymbol{y}^{[1]}$ und $\boldsymbol{y}^{[2]}$ zusammen ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems?

Lösung:

Wir berechnen die Wronski-Determinante

$$W(t) = \det \boldsymbol{Y}(t) = \det \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} & t^2 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} & 2t \end{pmatrix}$$

zum Beispiel an der Stelle $t = 1$.

$$W(1) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 \neq 0 .$$

Es handelt sich also um ein Fundamentalsystem. **[2 Punkte]**

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2\cos(t) + t^2 e^{-2t}, \text{ für } t > 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 5.$$

In welche algebraische Gleichung lässt sich die Anfangswertaufgabe durch die Laplace-Transformation überführen?

Lösung:

Es sei Y das Bild von y unter der Laplace Transformation. Dann gilt

$y \circ\!\!-\!\!\bullet Y, \qquad y' \circ\!\!-\!\!\bullet sY - y(0) = sY,$

$y'' \circ\!\!-\!\!\bullet s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 5,$ **[1 Punkt]**

$\cos(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{s^2+1}, \qquad t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2!}{s^{2+1}}, \qquad e^{-2t}t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{(s+2)^3}.$ **[2 Punkte]**

Die AWA geht über in

$$(s^2+4s+3)Y - 5 = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{2}{(s+2)^3}. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$