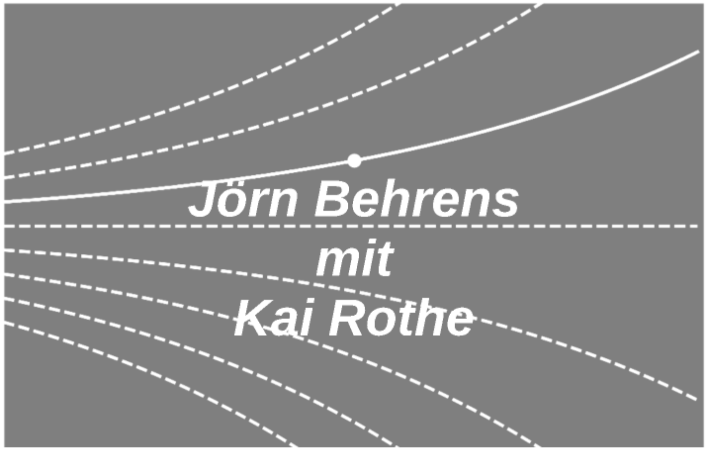
Differentialgleichungen I



Autonome Systeme und Stabilität

Buch Kapitel 6.14

Erinnerung

Definition: (Dynamisches System)
Betrachte die Abbildungen

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

$\mathbf{x}$ differenzierbar. Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t),$$

mit $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ und $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = (F_1(\mathbf{x}, t), \ldots, F_n(\mathbf{x}, t))^\top$, heißt dynamisches System.
Den Raum der Lösungskurven $\mathbf{x}(t)$ nennt man Phasenraum und die Lösungskurven auch Phasenkurven.

Bemerkung: (System erster Ordnung)
Wie schon beim linearen Fall, lässt sich eine DGL n-ter Ordnung in ein System von n Gleichungen erster Ordnung zurückführen:

- Sei gegeben: $y^{(n)} = f(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, t)$.
- Führe ein: $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, …, $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$.
- Das dynamische System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ mit

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{pmatrix} =: \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n, t)$$

  ist äquivalent zur DGL n-ter Ordnung oben.

Definition: (Autonomes System)
Hängt die Abbildung $\mathbf{F}$ des dynamischen Systems nicht von t ab, gilt also

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dann heißt das System autonomes System. 1

Definition: (Dynamisches System)
Betrachte die Abbildungen

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

$\mathbf{x}$ differenzierbar. Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t),$$

mit $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ und $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = (F_1(\mathbf{x}, t), \ldots, F_n(\mathbf{x}, t))^\top$, heißt dynamisches System.
Den Raum der Lösungskurven $\mathbf{x}(t)$ nennt man Phasenraum und die Lösungskurven auch Phasenkurven.

Bemerkung: (System erster Ordnung)
Wie schon beim linearen Fall, lässt sich eine DGL n-ter Ordnung in ein System von n Gleichungen erster Ordnung zurückführen:

- Sei gegeben: $y^{(n)} = f(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, t)$.
- Führe ein: $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, …, $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$.
- Das dynamische System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ mit

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{pmatrix} =: \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n, t)$$

  ist äquivalent zur DGL n-ter Ordnung oben.

Definition: (Autonomes System)
Hängt die Abbildung $\mathbf{F}$ des dynamischen Systems nicht von t ab, gilt also

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dann heißt das System autonomes System. 1

Stabilität linearer autonomer Systeme

Definition: (Gleichgewichtszustand)
Ist $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein autonomes System, so heißen Punkte $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

Gleichgewichtspunkt oder Gleichgewichtszustand des Systems.
Diese Punkte heißen auch *kritische*, *stationäre* oder *singuläre* Punkte.

Grundlegende Fragestellung: (Stabilität)
Verbleibt eine Phasenkurve, die in der Nähe eines Gleichgewichtes $\mathbf{x}_0$ startet, in seiner Nähe?

Bemerkung: (Lineares Autonomes System)

- Betrachte das autonome System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und setze $\mathbf{F} = A$.
- Dann ist $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ein Gleichgewichtspunkt.
- Hat A die n paarweise verschiedenen Eigenwerte λ_k, dann lautete die allgemeine Lösung des autonomen Systems

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{e}_n,$$

mit $\mathbf{e}_k$ den zu λ_k gehörenden Eigenvektoren.

Definition: (Eigenschaften von Gleichgewichten)
Sei $\mathbf{x}_0$ Gleichgewicht eines autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Dann heißt $\mathbf{x}_0$

1. attraktiv, wenn Lösungen $\mathbf{x}(t)$, die in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ starten gegen das Gleichgewicht konvergieren:

$$\exists \delta > 0 : \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0, \quad \forall \mathbf{x}(t) \text{ mit } |\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta,$$

2. stabil, wenn Lösungen $\mathbf{x}(t)$, die in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ starten, in dessen Nähe verbleiben:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ mit } |\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| < \epsilon \; \forall t > 0,$$

3. asymptotisch stabil, wenn es attraktiv und stabil ist,
4. instabil, wenn es Lösungen gibt, die – obwohl in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ gestartet – vom Gleichgewicht weglaufen:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ und } t_1 > 0 : \forall \delta > 0 \text{ mit } |\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| > \epsilon, \; t \geq t_1.$$

Satz: (Stabilität linearer autonomer Systeme)
Das Gleichgewicht $\mathbf{x}_0$ eines linearen autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ist

1. asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte von A negative Realteile besitzen,
2. stabil, falls kein Eigenwert von A einen positiven Realteil besitzt und für Eigenwerte mit Realteil Null gilt: geometrische = algebraische Vielfachheit,
3. instabil, falls ein Eigenwert von A positiven Realteil besitzt oder ein Eigenwert mit Realteil Null existiert, mit geometrischer < algebraischer Vielfachheit.

Definition: (Gleichgewichtszustand)
Ist $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein autonomes System, so heißen Punkte $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

Gleichgewichtspunkt oder Gleichgewichtszustand des Systems.
Diese Punkte heißen auch *kritische*, *stationäre* oder *singuläre* Punkte.

Bemerkung: (Gleichgewicht)
Offensichtlich ist $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ eine Konstante, zeitunabhängige Lösung des autonomen Systems, für die das System im Gleichgewicht ruht.

Grundlegende Fragestellung: (Stabilität)
Verbleibt eine Phasenkurve, die in der Nähe eines Gleichgewichtes $\mathbf{x}_0$ startet, in seiner Nähe?

Bemerkung: (Lineares Autonomes System)

- Betrachte das autonome System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und setze $\mathbf{F} = A$.
- Dann ist $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ein Gleichgewichtspunkt.
- Hat A die n paarweise verschiedenen Eigenwerte λ_k, dann lautete die allgemeine Lösung des autonomen Systems

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{e}_n,$$

mit $\mathbf{e}_k$ den zu λ_k gehörenden Eigenvektoren.

2

Definition: (Eigenschaften von Gleichgewichten)
Sei $\mathbf{x}_0$ Gleichgewicht eines autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Dann heißt $\mathbf{x}_0$

1. attraktiv, wenn Lösungen $\mathbf{x}(t)$, die in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ starten gegen das Gleichgewicht konvergieren:

$$\exists \delta > 0 : \lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0, \quad \forall \mathbf{x}(t) \text{ mit } |\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta,$$

2. stabil, wenn Lösungen $\mathbf{x}(t)$, die in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ starten, in dessen Nähe verbleiben:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ mit } |\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta \;\Rightarrow\; |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| < \epsilon \; \forall t > 0,$$

3. asymptotisch stabil, wenn es attraktiv und stabil ist,

4. instabil, wenn es Lösungen gibt, die – obwohl in der Nähe von $\mathbf{x}_0$ gestartet – vom Gleichgewicht weglaufen:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ und } t_1 > 0 : \forall \delta > 0 \text{ mit } |\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta \;\Rightarrow\; |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| > \epsilon, \; t \geq t_1.$$

Satz: (Stabilität linearer autonomer Systeme)
Das Gleichgewicht $\mathbf{x}_0$ eines linearen autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ist

1. asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte von A negative Realteile besitzen,
2. stabil, falls kein Eigenwert von A einen positiven Realteil besitzt und für Eigenwerte mit Realteil Null gilt: geometrische $=$ algebraische Vielfachheit.
3. instabil, falls ein Eigenwert von A positiven Realteil besitzt oder ein Eigenwert mit Realteil Null existiert, mit geometrischer $<$ algebraischer Vielfachheit.

Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme

Motivation:

- Interessante Fragestellungen sind oft nichtlinear.
- Da wir das Verhalten in der Umgebung des Gleichgewichtes studieren, können wir *linearisieren*.
- Lineare Approximation (Taylor-Entwicklung):

  $$\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

  mit $\mathbf{F}'$ Ableitungsmatrix von $\mathbf{F}$.
- Falls $\mathbf{F}$ hinreichend glatt gilt

  $$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$
- Falls $\mathbf{x}_0$ Gleichgewichtspunkt, dann gilt:

  $$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Satz: (Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme)
Das Gleichgewicht $\mathbf{x}_0$ eines nichtlinearen autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ist

1. asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte der Ableitungsmatrix $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$ negative Realteile besitzen,
2. instabil, falls mindestens ein Eigenwert von $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$ positiven Realteil besitzt.

3

Motivation:

- Interessante Fragestellungen sind oft nichtlinear.
- Da wir das Verhalten in der Umgebung des Gleichgewichtes studieren, können wir *linearisieren*.
- Lineare Approximation (Taylor-Entwicklung):

$$\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

  mit $\mathbf{F}'$ Ableitungsmatrix von $\mathbf{F}$.

- Falls $\mathbf{F}$ hinreichend glatt gilt

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

- Falls $\mathbf{x}_0$ Gleichgewichtspunkt, dann gilt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Satz: (Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme)
Das Gleichgewicht $\mathbf{x}_0$ eines nichtlinearen autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ist

1. asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte der Ableitungsmatrix $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$ negative Realteile besitzen,

2. instabil, falls mindestens ein Eigenwert von $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$ positiven Realteil besitzt.

3

Stabilität linearer autonomer Systeme

Erinnerung

Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme

Differentialgleichungen I

Autonome Systeme und Stabilität

Buch Kapitel 6.14