

Differentialgleichungen I



Autonome Systeme und Stabilität

Buch Kapitel 6.14

Erinnerung

Definition: (Dynamisches System)
Betrachte die Abbildungen

$$F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

x differenzierbar. Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = F(x, t),$$

mit $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ und $F(x, t) = (F_1(x, t), \dots, F_n(x, t))^T$, heißt **dynamisches System**.
Den Raum der Lösungskurven $x(t)$ nennt man **Phasenraum** und die Lösungskurven auch **Phasenkurven**.

Bemerkung: (System erster Ordnung)
Wie schon beim linearen Fall, lässt sich eine DGL n -ter Ordnung in ein System von n Gleichungen erster Ordnung zurückführen:

- Sei gegeben: $y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, t)$.
- Führe ein: $x_1(t) = y(t), x_2(t) = y'(t), \dots, x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$.
- Das dynamische System $\dot{x} = F(x, t)$ mit

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{pmatrix} =: F(x_1, \dots, x_n, t)$$

ist äquivalent zur DGL n -ter Ordnung oben.

Definition: (Autonomes System)

Hängt die Abbildung F des dynamischen Systems nicht von t ab, gilt also

$$\dot{x} = F(x)$$

mit $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann heißt das System **autonomes System**. **1**

Definition: (Dynamisches System)

Betrachte die Abbildungen

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

\mathbf{x} differenzierbar. Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t),$$

mit $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ und $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = (F_1(\mathbf{x}, t), \dots, F_n(\mathbf{x}, t))^T$, heißt **dy-**
namisches System.

Den Raum der Lösungskurven $\mathbf{x}(t)$ nennt man **Phasenraum** und die Lösungskurven
auch **Phasenkurven**.

Bemerkung: (System erster Ordnung)

Wie schon beim linearen Fall, lässt sich eine DGL n -ter Ordnung in ein System von n Gleichungen erster Ordnung zurückführen:

- Sei gegeben: $y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, t)$.
- Führe ein: $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, \dots , $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$.
- Das dynamische System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ mit

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{pmatrix} =: \mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, t)$$

ist äquivalent zur DGL n -ter Ordnung oben.

Definition: (Autonomes System)

Hängt die Abbildung \mathbf{F} des dynamischen Systems nicht von t ab, gilt also

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann heißt das System **autonomes System**.



Stabilität linearer autonomer Systeme

Definition: (Gleichgewichtszustand)
 Sei $\dot{x} = F(x)$ mit $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein autonomes System, so heißen Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$F(x_0) = 0$$

Gleichgewichtspunkt oder Gleichgewichtszustand des Systems.
 Diese Punkte heißen auch *stationäre* oder *stationäre* Punkte.

Grundlegende Fragestellung: (Stabilität)
 Verbleibt eine Phasenkurve, die in der Nähe eines Gleichgewichtes x_0 startet, in seiner Nähe?

Bemerkung: (Lineares Autonomes System)

- Betrachte das autonome System $\dot{x} = F(x)$.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und setze $F(x) = Ax$.
- Dann ist $x_0 = 0$ ein Gleichgewichtspunkt.
- Hat A die n paarweise verschiedenen Eigenwerte λ_i , dann lautet die allgemeine Lösung des autonomen Systems

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n,$$

mit v_i den zu λ_i gehörenden Eigenvektoren.

2

Definition: (Eigenverhalten um Gleichgewicht)

Sei x_0 Gleichgewicht eines autonomen Systems $\dot{x} = F(x)$. Dann heißt x_0

1. **asymptotisch stabil**, wenn Lösungen $x(t)$, die in der Nähe von x_0 starten gegen das Gleichgewicht konvergieren:
 $\|x(t) - x_0\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ und $\|x(0) - x_0\| < \delta$.
2. **stabil**, wenn Lösungen $x(t)$, die in der Nähe von x_0 starten, in dessen Nähe verbleiben:
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit $\|x(0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \epsilon \forall t \geq 0$.
3. **exponentiell stabil**, wenn es $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ gibt, so dass
 $\|x(t) - x_0\| \leq \beta \|x(0) - x_0\| e^{-\alpha t}$ für alle $t \geq 0$ und $\|x(0) - x_0\| < \beta^{-1}$.

Satz: (Kriterien linearer autonomer Systeme)

Das Gleichgewicht x_0 eines linearen autonomen Systems $\dot{x} = Ax$ ist

1. **exponentiell stabil**, falls alle Eigenwerte von A negative Realteile besitzen.
2. **stabil**, falls alle Eigenwerte von A einen positiven Realteil besitzen und für Eigenwerte mit Realteil Null gilt: geometrische Vielfachheit = algebraische Vielfachheit.
3. **asymptotisch instabil**, falls ein Eigenwert von A einen positiven Realteil besitzt oder ein Eigenwert mit Realteil Null existiert, mit geometrischer < algebraischer Vielfachheit.

Definition: (Gleichgewichtszustand)

Ist $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein autonomes System, so heißen Punkte $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

Gleichgewichtspunkt oder **Gleichgewichtszustand** des Systems.

Diese Punkte heißen auch *kritische*, *stationäre* oder *singuläre* Punkte.

Bemerkung: (Gleichgewicht)

Offensichtlich ist $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ eine Konstante, zeitunabhängige Lösung des autonomen Systems, für die das System **im Gleichgewicht ruht**.

Grundlegende Fragestellung: (Stabilität)

Verbleibt eine Phasenkurve, die in der Nähe eines Gleichgewichtes x_0 startet, in seiner Nähe?

Bemerkung: (Lineares Autonomes System)

- Betrachte das autonome System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.
- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und setze $\mathbf{F} = A$.
- Dann ist $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ein Gleichgewichtspunkt.
- Hat A die n paarweise verschiedenen Eigenwerte λ_k , dann lautet die allgemeine Lösung des autonomen Systems

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{e}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{e}_n,$$

mit \mathbf{e}_k den zu λ_k gehörenden Eigenvektoren.



Definition: (Eigenschaften von Gleichgewichten)

Sei \mathbf{x}_0 Gleichgewicht eines autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Dann heißt \mathbf{x}_0

1. **attraktiv**, wenn Lösungen $\mathbf{x}(t)$, die in der Nähe von \mathbf{x}_0 starten gegen das Gleichgewicht konvergieren:

$$\exists \delta > 0 : \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0, \quad \forall \mathbf{x}(0) \text{ mit } |\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta,$$

2. **stabil**, wenn Lösungen $\mathbf{x}(t)$, die in der Nähe von \mathbf{x}_0 starten, in dessen Nähe verbleiben:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } |\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| < \epsilon \quad \forall t > 0,$$

3. **asymptotisch stabil**, wenn es attraktiv und stabil ist,
4. **instabil**, wenn es Lösungen gibt, die – obwohl in der Nähe von \mathbf{x}_0 gestartet – vom Gleichgewicht weglaufen:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ und } t_1 > 0 : \forall \delta > 0 \text{ mit } |\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| > \epsilon, \quad t \geq t_1.$$

Satz: (Stabilität linearer autonomer Systeme)

Das Gleichgewicht \mathbf{x}_0 eines linearen autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ist

1. asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte von A negative Realteile besitzen,
2. stabil, falls kein Eigenwert von A einen positiven Realteil besitzt und für Eigenwerte mit Realteil Null gilt: geometrische = algebraische Vielfachheit.
3. instabil, falls ein Eigenwert von A positiven Realteil besitzt oder ein Eigenwert mit Realteil Null existiert, mit geometrischer $<$ algebraischer Vielfachheit.

Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme

Motivation

- Interessante Fragestellungen sind oft nichtlinear.
- Da wir das Verhalten in der Umgebung des Gleichgewichtes studieren, können wir linearisieren.
- Lineare Approximation (Taylor-Entwicklung)

$$Lx = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0),$$

mit F' Ableitungsmatrix von F .

- Falls F hinreichend glatt gilt

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0).$$

- Falls x_0 Gleichgewichtspunkt, dann gilt:

$$F(x) = F'(x_0)(x - x_0).$$

Satz: (Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme)

Das Gleichgewicht x_0 eines nichtlinearen autonomen Systems $\dot{x} = F(x)$ ist

1. *asymptotisch stabil*, falls alle Eigenwerte der Ableitungsmatrix $F'(x_0)$ negative Realteile besitzen,
2. *instabil*, falls mindestens ein Eigenwert von $F'(x_0)$ positiven Realteil besitzt.

3

Motivation:

- Interessante Fragestellungen sind oft nichtlinear.
- Da wir das Verhalten in der Umgebung des Gleichgewichtes studieren, können wir *linearisieren*.
- Lineare Approximation (Taylor-Entwicklung):

$$\mathbf{Lx} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

mit \mathbf{F}' Ableitungsmatrix von \mathbf{F} .

- Falls \mathbf{F} hinreichend glatt gilt

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

- Falls \mathbf{x}_0 Gleichgewichtspunkt, dann gilt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Satz: (Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme)

Das Gleichgewicht \mathbf{x}_0 eines nichtlinearen autonomen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ ist

1. **asymptotisch stabil**, falls alle Eigenwerte der Ableitungsmatrix $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$ negative Realteile besitzen,
2. **instabil**, falls mindestens ein Eigenwert von $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)$ positiven Realteil besitzt.



Stabilität linearer autonomer Systeme

Definition: Ein autonomes lineares System $\dot{x} = Ax$ heißt stabil, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle x_0 mit $\|x_0\| < \delta$ die Lösung $x(t)$ für alle $t \geq 0$ die Bedingung $\|x(t)\| < \epsilon$ erfüllt. Ist dies für ein δ unabhängig von ϵ der Fall, so heißt das System **global stabil**.

Satz: Ein autonomes lineares System $\dot{x} = Ax$ ist stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte λ_i des Matrizen A einen Realteil $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ haben.

Beispiel: Das System $\dot{x} = -x$ ist stabil, da $\lambda = -1$ einen Realteil $\text{Re}(\lambda) = -1 < 0$ hat.

Erinnerung

Definition: Ein autonomes System $\dot{x} = f(x)$ heißt stabil, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle x_0 mit $\|x_0 - x^*$ $\| < \delta$ die Lösung $x(t)$ für alle $t \geq 0$ die Bedingung $\|x(t) - x^*\| < \epsilon$ erfüllt.

Satz: Ein autonomes System $\dot{x} = f(x)$ ist stabil genau dann, wenn die Jacobi-Matrix $J_f(x^*)$ an der Gleichgewichtslage x^* einen Realteil $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle Eigenwerte λ_i hat.

Stabilität nichtlinearer autonomer Systeme

Definition: Ein autonomes System $\dot{x} = f(x)$ heißt stabil, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle x_0 mit $\|x_0 - x^*\| < \delta$ die Lösung $x(t)$ für alle $t \geq 0$ die Bedingung $\|x(t) - x^*\| < \epsilon$ erfüllt.

Satz: Ein autonomes System $\dot{x} = f(x)$ ist stabil genau dann, wenn die Jacobi-Matrix $J_f(x^*)$ an der Gleichgewichtslage x^* einen Realteil $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle Eigenwerte λ_i hat.

Differentialgleichungen I



Autonome Systeme und Stabilität
Reinhold Krauß 2014