

# Differentialgleichungen I



Eigenwertprobleme

Buch Kapitel 6.13

# Erinnerung: Selbstadjungierte Differentialoperatoren

**Betrachte:** (Randwertproblem)

Zu lösen sei auf dem Intervall  $I = [a, b]$

$$\begin{aligned} -Ly &= \lambda w(x)y, \\ R_1(y) &= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ R_2(y) &= \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{aligned}$$

Dabei sei  $L$  ein Sturm-Liouviller Differentialausdruck,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Parameter,  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$  ( $k = 1, 2$ ),  $w(x)$  eine auf  $I$  positive stetige Funktion.

Als Definitionsbereich von  $L$  wird  $C^2([a, b], \mathbb{R})$  angenommen, genauer die Teilmenge  $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$  von Funktionen, welche die Randbedingungen erfüllen. Die Elemente aus  $M$  heißen **Testfunktionen**.

**Satz:** (Selbstadjungiertes Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem)

Seien  $L[y] = (p(x)y')' + q(x)y$  der für  $x \in [a, b]$  definierte Sturm-Liouvillesche Differentialausdruck mit stetig diff'barer Funktion  $p(x) > 0$ , stetig diff'barer Funktion  $q(x)$  und stetiger Funktion  $w(x) > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Parameter und  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$  ( $k = 1, 2$ ).

Dann ist das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem

$$L[y] + \lambda w(x)y = 0, \quad \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

selbstadjungiert.

Nichttriviale Lösungen  $y_\lambda(x)$  zu gegebenen Parametern  $\lambda$  heißen **Eigenfunktionen** (falls sie existieren). Die entsprechenden Parameter  $\lambda$  heißen dann **Eigenwerte** des Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems.

**Definition:** (Selbstadjungierter Differentialoperator)

Sei  $L$  ein auf  $I = [a, b]$  definierter selbstadjungierter Differentialausdruck 2. Ordnung, und sei  $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$  die Menge aller Funktionen, die vorgegebene Randbedingungen an  $x = a$  und  $x = b$  erfüllen (Testfunktionen).

Gilt für alle  $u, v \in M$

$$(L[u], v) = (u, L[v]),$$

so heißt  $L$  **selbstadjungierter Differentialoperator** auf  $M$ . Das zugehörige Randwertproblem heißt ebenfalls **selbstadjungiert**.

**Betrachte:** (Randwertproblem)

Zu lösen sei auf dem Intervall  $I = [a, b]$

$$-L[y] = \lambda w(x)y,$$

$$R_1(y) = \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0,$$

$$R_2(y) = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$$

Dabei sei  $L$  ein Sturm-Liouville'scher Differentialausdruck,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Parameter,  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$  ( $k = 1, 2$ ),  $w(x)$  eine auf  $I$  positive stetige Funktion.

Als Definitionsbereich von  $L$  wird  $C^2([a, b], \mathbb{R})$  angenommen, genauer die Teilmenge  $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$  von Funktionen, welche die Randbedingungen erfüllen!. Die Elemente aus  $M$  heißen **Testfunktionen**.

**Definition:** (Selbstadjungierter Differentialoperator)

Sei  $L$  ein auf  $I = [a, b]$  definierter selbstadjungierter Differentialausdruck 2. Ordnung, und sei  $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$  die Menge aller Funktionen, die vorgegebene Randbedingungen an  $x = a$  und  $x = b$  erfüllen (Testfunktionen).

Gilt für alle  $u, v \in M$

$$(L[u], v) = (u, L[v]),$$

so heißt  $L$  **selbstadjungierter Differentialoperator** auf  $M$ . Das zugehörige Randwertproblem heißt ebenfalls **selbstadjungiert**.

**Satz:** (Selbstadjungiertes Sturm-Liouvillsches Eigenwertproblem)

Seien  $L[y] = (p(x)y')' + q(x)y$  der für  $x \in [a, b]$  definierte Sturm-Liouvillsche Differentialausdruck mit stetig diff'barer Funktion  $p(x) > 0$ , stetig diff'barer Funktion  $q(x)$  und stetiger Funktion  $w(x) > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Parameter und  $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$  ( $k = 1, 2$ ).

Dann ist das **Sturm-Liouvillsche Eigenwertproblem**

$$L[y] + \lambda w(x)y = 0, \quad \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

selbstadjungiert.

Nichttriviale Lösungen  $y_\lambda(x)$  zu gegebenen Parametern  $\lambda$  heißen **Eigenfunktionen** (falls sie existieren). Die entsprechenden Parameter  $\lambda$  heißen dann **Eigenwerte** des Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblems.

# Orthogonalität

## Definitionen:

- Führe ein **Skalarprodukt** auf dem Vektorraum  $C^2([a, b], \mathbb{R})$  ein:

$$(u, v) := \int_a^b u(x)v(x)w(x) dx.$$

- Dabei sei  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare und auf  $[a, b]$  **positive Gewichtsfunktion**.
- Zwei Elemente  $u, v \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  heißen **orthogonal**, falls  $(u, v) = 0$ .

## Erinnerung (Orthogonalität im $\mathbb{R}^n$ )

- Ist  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$  ( $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ ), so kann jeder Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  dargestellt werden:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e_i.$$

- Für die Koeffizienten gilt  $c_j = (x, e_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

## Satz (Orthogonalität in Sturm-Liouvilchen Eigenwertproblemen)

Für die Koeffizientenfunktionen der homogenen Sturm-Liouvilchen Differentialgleichung

$$L[y] + \lambda w = (p(x)y')' + q(x)y + \lambda w = 0$$

mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  einem Parameter, gelte:

- Für  $x \in [a, b]$  sei  $p(x)$  stetig differenzierbar,
- $q(x), w(x)$  seien stetig,
- Für  $x \in [a, b]$  sei  $p(x) > 0$  und  $w(x) > 0$ .

Dann gilt für zwei zu unterschiedlichen Parameterwerten  $\lambda = \lambda_1$  und  $\lambda = \lambda_2$  gehörende nichttriviale Lösungen  $y_1(x), y_2(x) \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  Orthogonalität, d.h.

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1(x)y_2(x)w(x) dx = 0,$$

falls

1.  $y_1$  und  $y_2$  die homogenen Randbedingungen  $R_1(y) = 0 = R_2(y)$  erfüllen, d.h.  $\lambda_1, \lambda_2$  sind Eigenwerte zu Eigenfunktionen  $y_1, y_2$  des Sturm-Liouvilchen Eigenwertproblems, oder
2. die Koeffizientenfunktion  $p(x)$  die Bedingung  $p(a) = p(b) = 0$  erfüllt.

1

## Definitionen:

- Führe ein **Skalarprodukt** auf dem Vektorraum  $C^2([a, b], \mathbb{R})$  ein:

$$\langle u, v \rangle := \int_a^b u(x)v(x)w(x) dx.$$

- Dabei sei  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare und auf  $]a, b[$  positive **Gewichtsfunktion**.
- Zwei Elemente  $u, v \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  heißen **orthogonal**, falls  $\langle u, v \rangle = 0$ .

**Erinnerung:** (Orthogonalität im  $\mathbb{R}^n$ )

- Ist  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$  ( $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}$ ), so kann jeder Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  dargestellt werden:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k.$$

- Für die Koeffizienten gilt  $c_j = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**Satz:** (Orthogonalität in Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblemen)

Für die Koeffizientenfunktionen der homogenen Sturm-Liouvillschen Differentialgleichung

$$L[y] + \lambda w y = (p(x)y')' + q(x)y + \lambda w y = 0$$

mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  einem Parameter, gelte:

- Für  $x \in [a, b]$  sei  $p(x)$  stetig differenzierbar,
- $q(x), w(x)$  seien stetig.
- Für  $x \in ]a, b[$  sei  $p(x) > 0$  und  $w(x) > 0$ .

Dann gilt für zwei zu unterschiedlichen Parameterwerten  $\lambda = \lambda_1$  und  $\lambda = \lambda_2$  gehörende nichttriviale Lösungen  $y_1(x), y_2(x) \in C^2([a, b], \mathbb{R})$  Orthogonalität, d.h.

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x)y_2(x)w(x) dx = 0,$$

falls

1.  $y_1$  und  $y_2$  die homogenen Randbedingungen  $R_1(y) = 0 = R_2(y)$  erfüllen, d.h.  $\lambda_1, \lambda_2$  sind Eigenwerte zu Eigenfunktionen  $y_1, y_2$  des Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblems, oder
2. die Koeffizientenfunktion  $p(x)$  die Bedingung  $p(a) = p(b) = 0$  erfüllt.

1

# Entwicklung nach Eigenfunktionen

## Satz: (Folge der Eigenwerte und Oszillation der Eigenfunktionen)

Sei das Sturm-Liouvilischen Eigenwertproblem mit Randbedingungen gegeben:

$$L[y] + \lambda w y = 0, R_1(y) = \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = R_2(y).$$

Dabei sei  $p(x) > 0$  und  $w(x) > 0$ . Dann sind die Eigenwerte des Eigenwertproblems einfach und bilden eine unendliche Folge reeller Zahlen  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , die gegen  $\infty$  strebt. Jede zu  $\lambda_n$  gehörende Eigenfunktion hat in  $]a, b[$  genau  $n$  Nullstellen.

## Motivation: (Eingegrenzte Membran)

Die Besondere Differentialgleichung

$$-L[y] = -(\rho y')' + \frac{H^2}{r^3} y = \omega^2 \rho y, \quad y(a) = y(b) = 0$$

repräsentiert beispielsweise das Schwingungsverhalten einer (ringförmigen) Membran, die am Rand eingepannt ist, wobei  $a$  der innere Radius und  $b$  der äußere Radius ist und  $\rho$  eine Materialdichte ist.

- Nach Satz gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge von Eigenwerten  $\omega_n^2 < \omega_{n+1}^2 < \dots$  mit  $\omega_n^2 \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).
- $\omega_n$  sind gerade die Eigenfrequenzen der Membran.
- $k$  ist die Anzahl der Wellenmaxima in radialer Richtung.



## Satz: (Entwicklungssatz)

Sei  $(y_n(x))$  eine Folge von normierten Eigenfunktionen, die zu den Eigenwerten  $\lambda_n$  des Eigenwertproblems

$$-L[y] = \omega w y, R_1(y) = 0 = R_2(y)$$

mit der Koeffizientenfunktion  $p(x) > 0$  und der Gewichtsfunktion  $w(x) > 0$  auf  $[a, b]$  gehören. Es gilt also

$$(y_k, y_j) = \delta_{kj}.$$

Dann lässt sich jede stetig diff'bare Funktion  $f$ , die die Randbedingungen des Eigenwertproblems erfüllt, als Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, y_n) y_n(x)$$

darstellen. Die Reihe konvergiert in  $[a, b]$  gleichmäßig und absolut.

2

**Satz:** (Folge der Eigenwerte und Oszillation der Eigenfunktionen)

Sei das Sturm-Liouville'sche Eigenwertproblem mit Randbedingungen gegeben:

$$L[y] + \lambda w y = 0, R_1(y) = \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = R_2(y).$$

Dabei sei  $p(x) > 0$  und  $w(x) > 0$ . Dann sind die Eigenwerte des Eigenwertproblems einfach und bilden eine unendliche Folge reeller Zahlen  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , die gegen  $\infty$  strebt. Jede zu  $\lambda_n$  gehörende Eigenfunktion hat in  $]a, b[$  genau  $n$  Nullstellen.

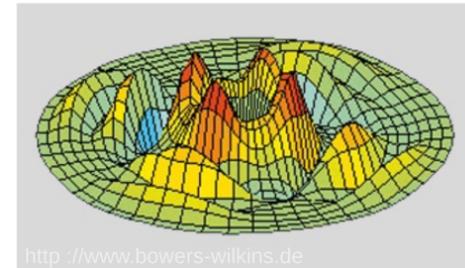
**Motivation:** (Eingespannte Membran)

Die Besselsche Differentialgleichung

$$-L[y] = -(\rho y')' + \frac{n^2}{\rho} y = \omega^2 \rho y, \quad y(a) = y(b) = 0$$

repräsentiert beispielsweise das Schwingungsverhalten einer (ringförmigen) Membran, die am Rand eingespannt ist, wobei  $a$  der innere Radius und  $b$  der äußere Radius ist und  $\rho$  eine Materialeigenschaft ist.

- Nach Satz gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge von Eigenwerten  $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \dots$  mit  $\omega_k^2 \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ).
- $\omega_k$  sind gerade die Eigenfrequenzen der Membran.
- $k$  ist die Anzahl der Wellenmaxima in radialer Richtung.



**Idee:** (Entwicklung durch Eigenfunktionen)

- Diese Schwingungszustände möchte man mit Hilfe der (dominierenden) Frequenzen (Eigenfunktionen) darstellen.
- Wegen der Orthogonalitätsrelation der Eigenfunktionen lassen sich (Lösungs-) Funktionen mit geeigneten Randbedingungen als Eigenfunktions-Reihen darstellen!

**Satz:** (Entwicklungssatz)

Sei  $(y_n(x))$  eine Folge von normierten Eigenfunktionen, die zu den Eigenwerten  $\lambda_n$  des Eigenwertproblems

$$-L[y] = \omega w y, R_1(y) = 0 = R_2(y)$$

mit der Koeffizientenfunktion  $p(x) > 0$  und der Gewichtsfunktion  $w(x) > 0$  auf  $[a, b]$  gehören. Es gilt also

$$\langle y_k, y_j \rangle = \delta_{kj}.$$

Dann lässt sich jede stetig diff'bare Funktion  $f$ , die die Randbedingungen des Eigenwertproblems erfüllt, als Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n(x)$$

darstellen. Die Reihe konvergiert in  $[a, b]$  gleichmäßig und absolut.



# Nichtlineare DGLn

## Motivation (Pendel)

- Die Gleichung zur Beschreibung einer Pendelschwingung lautet

$$\ddot{\varphi} + k \sin \varphi = 0.$$

- Beobachtung: diese Gleichung ist **nichtlinear!**
- Für kleine Auslenkungen  $\varphi$  gilt  $\sin \varphi \approx \varphi$ .
- Näherungsweise erhält man also die lineare DGL

$$\ddot{\varphi} + k\varphi = 0.$$

## Definition (Dynamisches System)

Betrachte die Abbildungen

$$F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$x$  differenzierbar. Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = F(x, t),$$

mit  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$  und  $F(x, t) = (F_1(x, t), \dots, F_n(x, t))^T$ , heißt **dynamisches System**.  
Der Raum der Lösungskurven  $x(t)$  nennt man **Phasenraum** und die Lösungskurven auch **Phasenkurven**.

## Bemerkung (System erster Ordnung)

Wir zeigen eines linearen Fall, dass sich eine DGL  $n$ -ter Ordnung in ein System von  $n$  Gleichungen erster Ordnung zurückföhren lässt.

- Die gegebenen  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, t)$ ,

- Föhre eine  $x_1(t) = y(t)$ ,  $x_2(t) = y'(t)$ ,  $\dots$ ,  $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$ .

- Das dynamische System  $\dot{x} = F(x, t)$  mit

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{pmatrix} = F(x_1, \dots, x_n, t)$$

ist äquivalent zur DGL  $n$ -ter Ordnung oben.

## Bemerkung (Anfangswertproblem)

Für ein dynamisches System  $\dot{x} = F(x, t)$  mit einer Anfangsbedingung

$$x(t_0) = x_0$$

gibt es ein **Anfangswertproblem (AWP)**.

## Satz: (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems)

Es gelte:

- Die Funktionen  $F_1, \dots, F_n$  seien partiell integrierbar nach  $x_1, \dots, x_n$ .
- Die partiellen Ableitungen seien auf einem Rechteck-Gebiet  $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$  stetig.
- Der Punkt  $(x_0, t_0)$  liege im Inneren von  $B$ .

Dann gibt es ein Intervall  $]t_0 - h, t_0 + h[$ , auf dem eine eindeutige Lösung  $x(t)$  des dynamischen Systems  $\dot{x} = F(x, t)$  existiert, welche  $x(t_0) = x_0$  erfüllt.

## Definition (Autonomes System)

Hängt die Abbildung  $F$  des dynamischen Systems nicht von  $t$  ab, gilt also

$$\dot{x} = F(x)$$

mit  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dann heißt das System **autonomes System**.

## Motivation: (Pendel)

- Die Gleichung zur Beschreibung einer Pendelschwingung lautet

$$\ddot{\varphi} + k \sin \varphi = 0.$$

- Beobachtung: diese Gleichung ist **nichtlinear!**
- Für kleine Auslenkungen  $\varphi$  gilt  $\sin \varphi \approx \varphi$ .
- Näherungsweise erhält man also die lineare DGL

$$\ddot{\varphi} + k\varphi = 0.$$

**Definition:** (Dynamisches System)

Betrachte die Abbildungen

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$\mathbf{x}$  differenzierbar. Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t),$$

mit  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$  und  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = (F_1(\mathbf{x}, t), \dots, F_n(\mathbf{x}, t))^T$ , heißt **dy-**  
**namisches System**.

Den Raum der Lösungskurven  $\mathbf{x}(t)$  nennt man **Phasenraum** und die Lösungskurven  
auch **Phasenkurven**.

**Bemerkung:** (System erster Ordnung)

Wie schon beim linearen Fall, lässt sich eine DGL  $n$ -ter Ordnung in ein System von  $n$  Gleichungen erster Ordnung zurückführen:

- Sei gegeben:  $y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, t)$ .
- Führe ein:  $x_1(t) = y(t)$ ,  $x_2(t) = y'(t)$ ,  $\dots$ ,  $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$ .
- Das dynamische System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  mit

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{pmatrix} =: \mathbf{F}(x_1, \dots, x_n, t)$$

ist äquivalent zur DGL  $n$ -ter Ordnung oben.

**Beispiel:** Das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -k \sin x_1 \end{pmatrix}$$

ist äquivalent zur DGL 2-ter Ordnung

$$\ddot{\varphi} + k \sin \varphi = 0.$$

**Bemerkung:** (Anfangswertproblem)

Für ein dynamisches System  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  sei eine Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

gegen, so ergibt sich daraus ein **Anfangswertproblem** (AWP).

**Satz:** (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems)

Es gelte:

- Die Funktionen  $F_1, \dots, F_n$  seien partiell integrierbar nach  $x_1, \dots, x_n$ .
- Die partiellen Ableitungen seien auf einem Rechteck-Gebiet  $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$  stetig.
- Der Punkt  $(\mathbf{x}_0, t_0)$  liege im Inneren von  $B$ .

Dann gibt es ein Intervall  $]t_0 - h, t_0 + h[$ , auf dem eine eindeutige Lösung  $\mathbf{x}(t)$  des dynamischen Systems  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  existiert, welche  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  erfüllt.

**Definition:** (Autonomes System)

Hängt die Abbildung  $\mathbf{F}$  des dynamischen Systems nicht von  $t$  ab, gilt also

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

mit  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dann heißt das System **autonomes System**.

### Nichtlineare DGLn

• Nichtlineare DGLn sind schwieriger zu lösen  
 • Es gibt keine allgemeine Methode zur Lösung  
 • Die Lösungsmenge ist oft nicht linear

**Beispiel:** Löse die DGL  $y' + y^2 = 0$  mit  $y(0) = 1$ .

**Lösung:**  $y' = -y^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = -dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = -x + C \Rightarrow \frac{1}{y} = x + C \Rightarrow y = \frac{1}{x + C}$

Einsetzen von  $y(0) = 1$ :  $1 = \frac{1}{0 + C} \Rightarrow C = 1$

Die Lösung ist  $y(x) = \frac{1}{x + 1}$ .

### Orthogonalität

• Orthogonale Funktionen sind wichtig für die Fourier-Analyse  
 • Die Orthogonalität bezieht sich auf das Skalarprodukt

**Definition:** Zwei Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  sind orthogonal auf dem Intervall  $[a, b]$ , wenn  $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ .

**Beispiel:** Die Funktionen  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  sind orthogonal auf  $[0, 2\pi]$ .

### Differentialgleichungen I

**100 Minuten  
mit  
Karl Ritter**

Eigenwertprobleme

### Entwicklung nach Eigenfunktionen

• Die Entwicklung nach Eigenfunktionen ist eine wichtige Methode zur Lösung von DGLn  
 • Sie basiert auf der Orthogonalität der Eigenfunktionen

**Beispiel:** Löse die DGL  $y'' + y = 0$  mit  $y(0) = 1$  und  $y(\pi) = 0$ .

**Lösung:** Die Eigenfunktionen sind  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$ . Die Entwicklung nach Eigenfunktionen liefert  $y(x) = \sin(x)$ .

### Erinnerung: Selbstadjungierte Differentialoperatoren

• Selbstadjungierte Differentialoperatoren sind wichtig für die Theorie der Eigenwertprobleme  
 • Sie sind hermitisch und haben reelle Eigenwerte

**Definition:** Ein Differentialoperator  $L$  ist selbstadjungiert, wenn  $\int_a^b (L f) g dx = \int_a^b f (L g) dx$  für alle Funktionen  $f, g$ .

**Beispiel:** Der Operator  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  ist selbstadjungiert auf dem Intervall  $[a, b]$ .