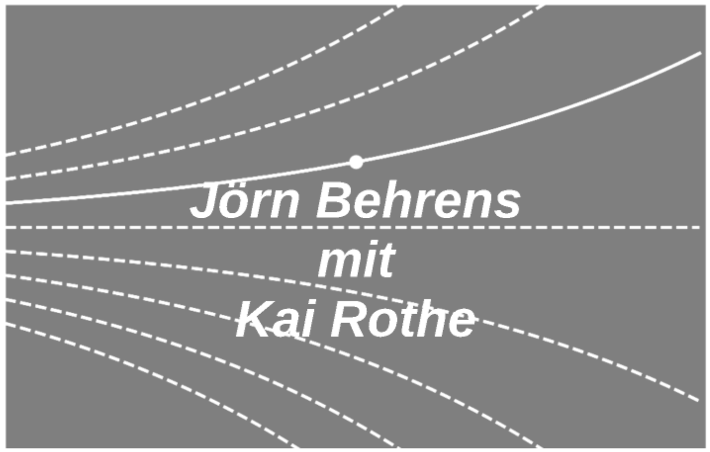
Differentialgleichungen I



Eigenwertprobleme

Buch Kapitel 6.13

Erinnerung: Selbstadjungierte Differentialoperatoren

Betrachte: (Randwertproblem)
Zu lösen sei auf dem Intervall $I = [a, b]$

$$\begin{aligned} -L[y] &= \lambda w(x) y, \\ R_1(y) &= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ R_2(y) &= \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{aligned}$$

Dabei sei L ein Sturm-Liouvillscher Differentialausdruck, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ $(k = 1, 2)$, $w(x)$ eine auf I positive stetige Funktion.

Als Definitionsbereich von L wird $C^2([a, b], \mathbb{R})$ angenommen, genauer die Teilmenge $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ von Funktionen, welche die Randbedingungen erfüllen!. Die Elemente aus M heißen Testfunktionen.

Satz: (Selbstadjungiertes Sturm-Liouvillsches Eigenwertproblem)
Seien $L[y] = (p(x)y')' + q(x)y$ der für $x \in [a, b]$ definierte Sturm-Liouvillsche Differentialausdruck mit stetig diff'barer Funktion $p(x) > 0$, stetig diff'barer Funktion $q(x)$ und stetiger Funktion $w(x) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ $(k = 1, 2)$.
Dann ist das Sturm-Liouvillsche Eigenwertproblem

$$L[y] + \lambda w(x) y = 0, \quad \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \; \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

selbstadjungiert.

Nichttriviale Lösungen $y_\lambda(x)$ zu gegebenen Parametern λ heißen Eigenfunktionen (falls sie existieren). Die entsprechenden Parameter λ heißen dann Eigenwerte des Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblems.

Definition: (Selbstadjungierter Differentialoperator)
Sei L ein auf $I = [a, b]$ definierter selbstadjungierter Differentialausdruck 2. Ordnung, und sei $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen, die vorgegebene Randbedingungen an $x = a$ und $x = b$ erfüllen (Testfunktionen).
Gilt für alle $u, v \in M$

$$(L[u], v) = (u, L[v]),$$

so heißt L selbstadjungierter Differentialoperator auf M. Das zugehörige Randwertproblem heißt ebenfalls selbstadjungiert.

Betrachte: (Randwertproblem)
Zu lösen sei auf dem Intervall $I = [a, b]$

$$\begin{aligned} -L[y] &= \lambda w(x) y, \\ R_1(y) &= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ R_2(y) &= \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{aligned}$$

Dabei sei L ein Sturm-Liouvillscher Differentialausdruck, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ $(k = 1, 2)$, $w(x)$ eine auf I positive stetige Funktion.

Als Definitionsbereich von L wird $C^2([a, b], \mathbb{R})$ angenommen, genauer die Teilmenge $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ von Funktionen, welche die Randbedingungen erfüllen!. Die Elemente aus M heißen Testfunktionen.

Definition: (Selbstadjungierter Differentialoperator)
Sei L ein auf $I = [a, b]$ definierter selbstadjungierter Differentialausdruck 2. Ordnung, und sei $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen, die vorgegebene Randbedingungen an $x = a$ und $x = b$ erfüllen (Testfunktionen).
Gilt für alle $u, v \in M$

$$(L[u], v) = (u, L[v]),$$

so heißt L selbstadjungierter Differentialoperator auf M. Das zugehörige Randwertproblem heißt ebenfalls selbstadjungiert.

Satz: (Selbstadjungiertes Sturm-Liouvillsches Eigenwertproblem)
Seien $L[y] = (p(x)y')' + q(x)y$ der für $x \in [a, b]$ definierte Sturm-Liouvillsche Differentialausdruck mit stetig diff'barer Funktion $p(x) > 0$, stetig diff'barer Funktion $q(x)$ und stetiger Funktion $w(x) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ $(k = 1, 2)$.
Dann ist das Sturm-Liouvillsche Eigenwertproblem

$$L[y] + \lambda w(x)y = 0, \quad \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0,\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

selbstadjungiert.

Nichttriviale Lösungen $y_\lambda(x)$ zu gegebenen Parametern λ heißen Eigenfunktionen (falls sie existieren). Die entsprechenden Parameter λ heißen dann Eigenwerte des Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblems.

Orthogonalität

Definitionen:

- Führe ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $C^2([a,b],\mathbb{R})$ ein:

$$\langle u,v\rangle := \int_a^b u(x)v(x)w(x)\;dx.$$

- Dabei sei $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine integrierbare und auf $]a,b[$ positive Gewichtsfunktion.
- Zwei Elemente $u,v\in C^2([a,b],\mathbb{R})$ heißen orthogonal, falls $\langle u,v\rangle = 0$.

Erinnerung: (Orthogonalität im $\mathbb{R}^n$)

- Ist $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ ($(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k)=\delta_{ik}$), so kann jeder Vektor $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ dargestellt werden:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k\mathbf{e}_k.$$

- Für die Koeffizienten gilt $c_j = (\mathbf{x},\mathbf{e}_j)$, $j=1,\ldots,n$.

Satz: (Orthogonalität in Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblemen)
Für die Koeffizientenfunktionen der homogenen Sturm-Liouvillschen Differentialgleichung

$$L[y] + \lambda wy = (p(x)y')' + q(x)y + \lambda wy = 0$$

mit $\lambda\in\mathbb{R}$ einem Parameter, gelte:

- Für $x\in[a,b]$ sei $p(x)$ stetig differenzierbar,
- $q(x), w(x)$ seien stetig.
- Für $x\in]a,b[$ sei $p(x)>0$ und $w(x)>0$.

Dann gilt für zwei zu unterschiedlichen Parameterwerten $\lambda=\lambda_1$ und $\lambda=\lambda_2$ gehörende nichttriviale Lösungen $y_1(x), y_2(x)\in C^2([a,b],\mathbb{R})$ Orthogonalität, d.h.

$$\langle y_1,y_2\rangle = \int_a^b y_1(x)y_2(x)w(x)\;dx = 0,$$

falls

1. y_1 und y_2 die homogenen Randbedingungen $R_1(y)=0=R_2(y)$ erfüllen, d.h. λ_1,λ_2 sind Eigenwerte zu Eigenfunktionen y_1,y_2 des Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblems, oder
2. die Koeffizientenfunktion $p(x)$ die Bedingung $p(a)=p(b)=0$ erfüllt.

1

Definitionen:

- Führe ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $C^2([a,b],\mathbb{R})$ ein:

$$\langle u, v\rangle := \int_a^b u(x)v(x)w(x)\ dx.$$

- Dabei sei $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare und auf $]a,b[$ positive Gewichtsfunktion.

- Zwei Elemente $u, v \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ heißen orthogonal, falls $\langle u, v\rangle = 0$.

Erinnerung: (Orthogonalität im $\mathbb{R}^n$)

- Ist $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ $((\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik})$, so kann jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dargestellt werden:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{e}_k.$$

- Für die Koeffizienten gilt $c_j = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

Satz: (Orthogonalität in Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblemen)
Für die Koeffizientenfunktionen der homogenen Sturm-Liouvillschen Differentialgleichung

$$L[y] + \lambda w y = (p(x)y')' + q(x)y + \lambda w y = 0$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ einem Parameter, gelte:

- Für $x \in [a, b]$ sei $p(x)$ stetig differenzierbar,
- $q(x), w(x)$ seien stetig.
- Für $x \in]a, b[$ sei $p(x) > 0$ und $w(x) > 0$.

Dann gilt für zwei zu unterschiedlichen Parameterwerten $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ gehörende nichttriviale Lösungen $y_1(x), y_2(x) \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ Orthogonalität, d.h.

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x) y_2(x) w(x)\ dx = 0,$$

falls

1. y_1 und y_2 die homogenen Randbedingungen $R_1(y) = 0 = R_2(y)$ erfüllen, d.h. λ_1, λ_2 sind Eigenwerte zu Eigenfunktionen y_1, y_2 des Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblems, oder
2. die Koeffizientenfunktion $p(x)$ die Bedingung $p(a) = p(b) = 0$ erfüllt.

1

Entwicklung nach Eigenfunktionen

Satz: (Folge der Eigenwerte und Oszillation der Eigenfunktionen)
Sei das Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblem mit Randbedingungen gegeben:

$$L[y] + \lambda wy = 0, R_1(y) = \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 = \alpha_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = R_2(y).$$

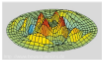
Dabei sei $p(x) > 0$ und $w(x) > 0$. Dann sind die Eigenwerte des Eigenwertproblems einfach und bilden eine unendliche Folge reeler Zahlen $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, die gegen ∞ strebt. Jede zu λ_n gehörende Eigenfunktion hat in $]a, b[$ genau n Nullstellen.

Motivation: (Eingespannte Membran)
Die Besselsche Differentialgleichung

$$-L[y] = -(\rho y')' + \frac{n^2}{\rho} y = \omega^2 \rho y, \quad y(a) = y(b) = 0$$

repräsentiert beispielsweise das Schwingungsverhalten einer (ringförmigen) Membran, die am Rand eingespannt ist, wobei a der innere Radius und b der äußere Radius ist und ρ eine Materialeigenschaft ist.

- Nach Satz gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Eigenwerten $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \cdot$ mit $\omega_k^2 \to \infty$ $(k \to \infty)$.
- ω_k sind gerade die Eigenfrequenzen der Membran.
- k ist die Anzahl der Wellenmaxima in radialer Richtung.



Satz: (Entwicklungssatz)
Sei $(y_n(x))$ eine Folge von normierten Eigenfunktionen, die zu den Eigenwerten λ_n des Eigenwertproblems

$$-L[y] = \omega wy, R_1(y) = 0 = R_2(y)$$

mit der Koeffizientenfunktion $p(x) > 0$ und der Gewichtsfunktion $w(x) > 0$ auf $[a, b]$ gehören. Es gilt also

$$\langle y_k, y_j \rangle = \delta_{kj}.$$

Dann lässt sich jede stetig diff'bare Funktion f, die die Randbedingungen des Eigenwertproblems erfüllt, als Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n(x)$$

darstellen. Die Reihe konvergiert in $[a, b]$ gleichmäßig und absolut.

Satz: (Folge der Eigenwerte und Oszillation der Eigenfunktionen)
Sei das Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblem mit Randbedingungen gegeben:

$$L[y] + \lambda w y = 0, R_1(y) = \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 = \alpha_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = R_2(y).$$

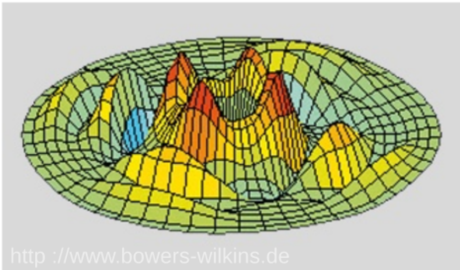
Dabei sei $p(x) > 0$ und $w(x) > 0$. Dann sind die Eigenwerte des Eigenwertproblems einfach und bilden eine unendliche Folge reeler Zahlen $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, die gegen ∞ strebt. Jede zu λ_n gehörende Eigenfunktion hat in $]a, b[$ genau n Nullstellen.

Motivation: (Eingespannte Membran)
Die Besselsche Differentialgleichung

$$-L[y] = -(\rho y')' + \frac{n^2}{\rho} y = \omega^2 \rho y, \quad y(a) = y(b) = 0$$

repräsentiert beispielsweise das Schwingungsverhalten einer (ringförmigen) Membran, die am Rand eingespannt ist, wobei a der innere Radius und b der äußere Radius ist und ρ eine Materialeigenschaft ist.

- Nach Satz gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Eigenwerten $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \cdot$ mit $\omega_k^2 \to \infty$ $(k \to \infty)$.
- ω_k sind gerade die Eigenfrequenzen der Membran.
- k ist die Anzahl der Wellenmaxima in radialer Richtung.



Idee: (Entwicklung durch Eigenfunktionen)

- Diese Schwingungszustände möchte man mit Hilfe der (dominierenden) Frequenzen (Eigenfunktionen) darstellen.
- Wegen der Orthogonalitätsrelation der Eigenfunktionen lassen sich (Lösungs-) Funktionen mit geeigneten Randbedingungen als Eigenfunktions-Reihen darstellen!

Satz: (Entwicklungssatz)
Sei $(y_n(x))$ eine Folge von normierten Eigenfunktionen, die zu den Eigenwerten λ_n des Eigenwertproblems

$$-L[y] = \omega w y, R_1(y) = 0 = R_2(y)$$

mit der Koeffizientenfunktion $p(x) > 0$ und der Gewichtsfunktion $w(x) > 0$ auf $[a, b]$ gehören. Es gilt also

$$\langle y_k, y_j \rangle = \delta_{kj}.$$

Dann lässt sich jede stetig diff'bare Funktion f, die die Randbedingungen des Eigenwertproblems erfüllt, als Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n(x)$$

darstellen. Die Reihe konvergiert in $[a, b]$ gleichmäßig und absolut.

2

Nichtlineare DGLn

Motivation: (Pendel)

- Die Gleichung zur Beschreibung einer Pendelschwingung lautet
$$\ddot{\varphi} + k \sin \varphi = 0.$$
- Beobachtung: diese Gleichung ist nichtlinear!
- Für kleine Ausrenkungen φ gilt $\sin \varphi \approx \varphi$.
- Näherungsweise erhält man also die lineare DGL
$$\ddot{\varphi} + k\varphi = 0.$$

Definition: (Dynamisches System)
Betrachte die Abbildungen
$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$
$\mathbf{x}$ differenzierbar. Das Differentialgleichungssystem
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t),$$
mit $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ und $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = (F_1(\mathbf{x}, t), \ldots, F_n(\mathbf{x}, t))^\top$, heißt dynamisches System.
Den Raum der Lösungskurven $\mathbf{x}(t)$ nennt man Phasenraum und die Lösungskurven auch Phasenkurven.

Bemerkung: (System erster Ordnung)
Wie schon beim linearen Fall, lässt sich eine DGL n-ter Ordnung in ein System von n Gleichungen erster Ordnung zurückführen:

- Sei gegeben: $y^{(n)} = f(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, t)$.
- Führe ein: $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, …, $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$.
- Das dynamische System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ mit
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{pmatrix} =: \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n, t)$$
ist äquivalent zur DGL n-ter Ordnung oben.

Bemerkung: (Anfangswertproblem)
Für ein dynamisches System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ sei eine Anfangsbedingung
$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$
gegen, so ergibt sich daraus ein Anfangswertproblem (AWP).

Satz: (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems)
Es gelte:

- Die Funktionen $F_1, \ldots, F_n$ seien partiell integrierbar nach $x_1, \ldots, x_n$.
- Die partiellen Ableitungen seien auf einem Rechteck-Gebiet $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig.
- Der Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0)$ liege im Inneren von B.

Dann gibt es ein Intervall $]t_0 - h, t_0 + h[$, auf dem eine eindeutige Lösung $\mathbf{x}(t)$ des dynamischen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ existiert, welche $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ erfüllt.

Definition: (Autonomes System)
Hängt die Abbildung $\mathbf{F}$ des dynamischen Systems nicht von t ab, gilt also
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$
mit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dann heißt das System autonomes System.

Motivation: (Pendel)

- Die Gleichung zur Beschreibung einer Pendelschwingung lautet

$$\ddot{\varphi} + k \sin \varphi = 0.$$

- Beobachtung: diese Gleichung ist nichtlinear!
- Für kleine Ausrenkungen φ gilt $\sin \varphi \approx \varphi$.
- Näherungsweise erhält man also die lineare DGL

$$\ddot{\varphi} + k\varphi = 0.$$

Definition: (Dynamisches System)
Betrachte die Abbildungen

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

$\mathbf{x}$ differenzierbar. Das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t),$$

mit $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$ und $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = (F_1(\mathbf{x}, t), \ldots, F_n(\mathbf{x}, t))^\top$, heißt dynamisches System.
Den Raum der Lösungskurven $\mathbf{x}(t)$ nennt man Phasenraum und die Lösungskurven auch Phasenkurven.

Bemerkung: (System erster Ordnung)
Wie schon beim linearen Fall, lässt sich eine DGL n-ter Ordnung in ein System von n Gleichungen erster Ordnung zurückführen:

- Sei gegeben: $y^{(n)} = f(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, t)$.
- Führe ein: $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$, …, $x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$.
- Das dynamische System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ mit

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{pmatrix} =: \mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n, t)$$

  ist äquivalent zur DGL n-ter Ordnung oben.

Beispiel: Das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -k \sin x_1 \end{pmatrix}$$

ist äquivalent zur DGL 2-ter Ordnung

$$\ddot{\varphi} + k \sin \varphi = 0.$$

Bemerkung: (Anfangswertproblem)
Für ein dynamisches System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ sei eine Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

gegen, so ergibt sich daraus ein Anfangswertproblem (AWP).

Satz: (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems)
Es gelte:

- Die Funktionen $F_1, \ldots, F_n$ seien partiell integrierbar nach $x_1, \ldots, x_n$.
- Die partiellen Ableitungen seien auf einem Rechteck-Gebiet $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig.
- Der Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0)$ liege im Inneren von B.

Dann gibt es ein Intervall $]t_0 - h, t_0 + h[$, auf dem eine eindeutige Lösung $\mathbf{x}(t)$ des dynamischen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ existiert, welche $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ erfüllt.

Definition: (Autonomes System)
Hängt die Abbildung $\mathbf{F}$ des dynamischen Systems nicht von t ab, gilt also

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dann heißt das System autonomes System.

Nichtlineare DGLn

Orthogonalität

Differentialgleichungen I

Eigenwertprobleme

Buch Kapitel 6.13

Entwicklung nach Eigenfunktionen

Erinnerung: Selbstadjungierte Differentialoperatoren