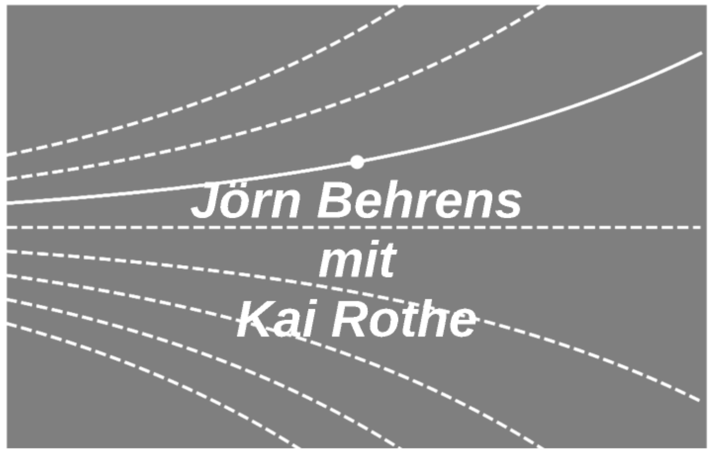
Differentialgleichungen I



Rand- und Eigenwertprobleme

Buch Kapitel 6.13

Erinnerung Potenzreihen-Ansatz

Zusammenfassung:
Betrachte das AWP

$$y'' + y = \cos(2x), \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

1. Verwende den Ansatz einer Potenzreihe: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
2. Berechne y' und y'' aus diesem Ansatz.
3. Erhalte a_0 und a_1 aus Anfangswerten.
4. Setze Reihen in DGL ein, verwende Potenzreihendarstellung für $\cos$.
5. Führe Koeffizientenvergleich durch und erhalte y als Potenzreihe.
6. Falls möglich, erhalte geschlossene Form aus Potenzreihen-Darstellung für y.

Bemerkungen:

- Falls Anwangswerte $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, x_0 \neq 0$ gegeben sind, dann verwendet man den Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

- Im Allgemeinen ist eine geschlossene Form nicht unbedingt zu finden. Dann muss man mit der Potenzreihe von $y(x)$ oder gar ihren ersten Gliedern vorlieb nehmen.
- Der wesentliche Nutzen der Potenzreihe liegt in der "einfachen" Differenzierbarkeit!

Zusammenfassung:
Betrachte das AWP

$$y'' + y = \cos(2x), \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

1. Verwende den Ansatz einer Potenzreihe: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.
2. Berechne y' und y'' aus diesem Ansatz.
3. Erhalte a_0 und a_1 aus Anfangswerten.
4. Setze Reihen in DGL ein, verwende Potenzreihendarstellung für $\cos$.
5. Führe Koeffizientenvergleich durch und erhalte y als Potenzreihe.
6. Falls möglich, erhalte geschlossene Form aus Potenzreihen-Darstellung für y.

Bemerkungen:

- Falls Anwangswerte $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, x_0 \neq 0$ gegeben sind, dann verwendet man den Ansatz

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

- Im Allgemeinen ist eine geschlossene Form nicht unbedingt zu finden. Dann muss man mit der Potenzreihe von $y(x)$ oder gar ihren ersten Gliedern vorlieb nehmen.

- Der wesentliche Nutzen der Potenzreihe liegt in der "einfachen" Differenzierbarkeit!

Randwertprobleme

Bemerkung
Randwertprobleme sind (anders als Anfangswertprobleme) nicht immer lösbar!

Definition: (Differentialausdruck 2. Ordnung)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall und $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $r(x)$ stetige Funktionen. Dann definiere

$$D[y] := a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x)$$

den Differentialausdruck, der auf I zweimal stetig differenzierbare Funktionen $y(x)$ in stetige Funktionen $D[y]$ überführt.

Definition: (Sturmsche Randbedingungen)
Sei die Differentialgleichung

$$D[y] = r(x)$$

wie zuvor gegeben. Seien weiter

$$R_1(y) := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a), \quad R_2(y) := \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b),$$

mit $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$, $k = 1, 2$.
Dann erfülle die DGL die Sturmschen Randbedingungen

$$R_k(y) = \gamma_k \quad (k = 1, 2).$$

Bemerkung: (Lineares Gleichungssystem)
Frage: Lösbarkeit der DGL mit Randbedingungen.

- Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\{y_1, y_2\}$ Fundamentalsystem der homogenen DGL $D[y] = 0$ und y_p partikuläre Lösung der inhomogenen DGL $D[y] = r(x)$.
- Die Ableitung: $y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + y_p'(x)$.
- Damit ergeben sich für die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1[c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_p(a)] + \beta_1[c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) + y_p'(a)] &= \gamma_1 \\ \alpha_2[c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + y_p(b)] + \beta_2[c_1 y_1'(b) + c_2 y_2'(b) + y_p'(b)] &= \gamma_2 \end{aligned}$$

- Umformen:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a))c_1 + (\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a))c_2 &= \gamma_1 - \alpha_1 y_p(a) - \beta_1 y_p'(a) \\ (\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b))c_1 + (\alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b))c_2 &= \gamma_2 - \alpha_2 y_p(b) - \beta_2 y_p'(b). \end{aligned}$$

- Mit den Definitionen für R_1, R_2 und

$$r_1 = \gamma_1 - \alpha_1 y_p(a) - \beta_1 y_p'(a), \quad r_2 = \gamma_2 - \alpha_2 y_p(b) - \beta_2 y_p'(b)$$

erhalte lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

- Ist das lineare Gleichungssystem lösbar, so auch die DGL mit Randbedingungen. Also

$$\det \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \neq 0!$$

2

Definition: (Differentialausdruck 2. Ordnung)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall und $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $r(x)$ stetige Funktionen. Dann definiere

$$D[y] := a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x)$$

den Differentialausdruck, der auf I zweimal stetig differenzierbare Funktionen $y(x)$ in stetige Funktionen $D[y]$ überführt.

Bemerkungen:

- Betrachte die DGL $D[y] = r(x)$.
- Mit Anfangswerten

  $$y(\xi) = \eta_a, \quad y'(\xi) = \gamma_a, \quad \xi \in I,\ \eta_a, \gamma_a \in \mathbb{R},$$

  existiert nach Satz genau eine Lösung auf I.
- Frage: Was, wenn nicht nur an ξ, sondern auch an einer anderen Stelle Bedingungen gestellt werden?

Bemerkung:
Randwertprobleme sind (anders als Anfangswertprobleme) nicht immer lösbar!

Definition: (Sturmsche Randbedingungen)
Sei die Differentialgleichung

$$D[y] = r(x)$$

wie zuvor gegeben. Seien weiter

$$R_1(y) := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a), \quad R_2(y) := \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b),$$

mit $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$, $k = 1, 2$.
Dann erfülle die DGL die Sturmschen Randbedingungen

$$R_k(y) = \gamma_k \quad (k = 1, 2).$$

Bemerkung: (Lineares Gleichungssystem)
Frage: Lösbarkeit der DGL mit Randbedingungen.

- Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\{y_1, y_2\}$ Fundamentalsystem der homogenen DGL $D[y] = 0$ und y_p partikuläre Lösung der inhomogenen DGL $D[y] = r(x)$.
- Die Ableitung: $y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + y_p'(x)$.
- Damit ergeben sich für die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1[c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) + y_p(a)] + \beta_1[c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) + y_p'(a)] &= \gamma_1 \\ \alpha_2[c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) + y_p(b)] + \beta_2[c_1 y_1'(b) + c_2 y_2'(b) + y_p'(b)] &= \gamma_2 \end{aligned}$$

- Umformen:

$$\begin{aligned} (\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a))c_1 + (\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a))c_2 &= \gamma_1 - \alpha_1 y_p(a) - \beta_1 y_p'(a) \\ (\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b))c_1 + (\alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b))c_2 &= \gamma_2 - \alpha_2 y_p(b) - \beta_2 y_p'(b). \end{aligned}$$

- Mit den Definitionen für R_1, R_2 und

$$r_1 = \gamma_1 - \alpha_1 y_p(a) - \beta_1 y_p'(a), \quad r_2 = \gamma_2 - \alpha_2 y_p(b) - \beta_2 y_p'(b)$$

  erhalte lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

- Ist das lineare Gleichungssystem lösbar, so auch die DGL mit Randbedingungen. Also

$$\det \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \neq 0!$$

2

Selbstadjungierte Differentialausdrücke

Vorbemerkung: (Differentialausdrücke)
Betrachte Differentialausdrücke

$$D : C^2([a,b],\mathbb{R}) \to W$$

- $C^2([a,b],\mathbb{R})$ ist die Menge der auf dem Intervall $I = [a,b]$ zweimal stetig diff'baren Funktionen.
- W ist eine Menge von stetigen Funktionen, Bildbereich von D.

Definition: (Adjungierter Differentialausdruck n-ter Ordnung)
Sei

$$D[y] := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) y^{(n-\nu)}$$

ein linearer Differentialausdruck n-ter Ordnung, $a_\nu(x)$ vorgegebene auf I $(n-\nu)$-mal stetig diff'bare Funktionen, $a_0(x) \neq 0$, der auf $y(x)$ eine beliebige auf I n-mal stetig diff'bare Funktion angewendet wird.
Der zu $D[y]$ adjungierte Differentialausdruck ist dann gegeben durch

$$D^*[y] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} (a_\nu(x) y(x))^{(n-\nu)}.$$

Definition: (Selbstadjungierter Differentialausdruck n-ter Ordnung)
Ein Differentialausdruck $D[y]$ heißt selbstadjungiert, wenn

$$D^*[y] = D[y]$$

für alle auf I n-mal stetig diff'baren Funktionen y gilt.

Beispiel: Selbstadjungierter Differentialausdruck für $n = 2$:
Wir hatten schon berechnet:

$$\begin{aligned} D[y] &= a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \\ D^*[y] &= (a_0(x)y)'' - (a_1(x)y)' + a_2(x)y \\ &= a_0(x)y'' + (2a_0'(x) - a_1(x))y' + (a_0''(x) - a_1'(x) + a_2(x))y. \end{aligned}$$

Damit und mit $D^*[y] = D[y]$ folgt:

$$\begin{aligned} 2a_0' - a1 = a_1 &\Rightarrow a_0' = a_1 \\ a_0'' - a_1' + a_2 = a_2 &\Rightarrow a_0'' = a_1'. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$D[y] = (a_0(x)y')' + a_2(x)y.$$

3

Definition: (Sturm-Liouwillescher Differentialausdruck)
$p(x)$ sei auf einem Intervall $I = [a,b]$ stetig diff'bar und positiv, $q(x)$ und $z(x)$ seien auf I stetig. Dann heißen

$$L[y] = (p(x)y')' + q(x)y$$

Sturm-Liouvillescher Differentialausdruck und

$$L[y] = z(x)$$

Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung.

Vorbemerkung: (Differentialausdrücke)
Betrachte Differentialausdrücke

$$D : C^2([a,b],\mathbb{R}) \to W$$

- $C^2([a,b],\mathbb{R})$ ist die Menge der auf dem Intervall $I = [a,b]$ zweimal stetig diff'baren Funktionen.

- W ist eine Menge von stetigen Funktionen, Bildbereich von D.

Definition: (Adjungierter Differentialausdruck n-ter Ordnung)
Sei

$$D[y] := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) y^{(n-\nu)}$$

ein linearer Differentialausdruck n-ter Ordnung, $a_\nu(x)$ vorgegebene auf I $(n-\nu)$-mal stetig diff'bare Funktionen, $a_0(x) \neq 0$, der auf $y(x)$ eine beliebige auf I n-mal stetig diff'bare Funktion angewendet wird.
Der zu $D[y]$ adjungierte Differentialausdruck ist dann gegeben durch

$$D^*[y] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} (a_\nu(x) y(x))^{(n-\nu)}.$$

Beispiel: $n = 2$

$$\begin{aligned} D[y] &= a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \\ D^*[y] &= (a_0(x)y)'' - (a_1(x)y)' + a_2(x)y \\ &= a_0(x)y'' + (2a_0'(x) - a_1(x))y' + (a_0''(x) - a_1'(x) + a_2(x))y. \end{aligned}$$

Definition: (Selbstadjungierter Differentialausdruck n-ter Ordnung)
Ein Differentialausdruck $D[y]$ heißt selbstadjungiert, wenn

$$D^*[y] = D[y]$$

für alle auf I n-mal stetig diff'baren Funktionen y gilt.

Beispiel: Selbstadjungierter Differentialausdruck für $n = 2$:
Wir hatten schon berechnet:

$$\begin{aligned} D[y] &= a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y \\ D^*[y] &= (a_0(x)y)'' - (a_1(x)y)' + a_2(x)y \\ &= a_0(x)y'' + (2a_0'(x) - a_1(x))y' + (a_0''(x) - a_1'(x) + a_2(x))y. \end{aligned}$$

Damit und mit $D^*[y] = D[y]$ folgt:

$$\begin{aligned} 2a_0' - a1 = a_1 \quad &\Rightarrow \quad a_0' = a_1 \\ a_0'' - a_1' + a_2 = a_2 \quad &\Rightarrow \quad a_0'' = a_1'. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$D[y] = (a_0(x)y')' + a_2(x)y.$$

3

Definition: (Sturm-Liouwillescher Differentialausdruck)
$p(x)$ sei auf einem Intervall $I = [a, b]$ stetig diff'bar und positiv, $q(x)$ und $z(x)$ seien auf I stetig. Dann heißen

$$L[y] = (p(x)y')' + q(x)y$$

Sturm-Liouvillescher Differentialausdruck und

$$L[y] = z(x)$$

Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung.

Beispiele: (Besselsche Differentialgleichung)

1. Für die DGL
$$y'' + e^x y' + xy = 0$$
erhält man
$$s(x) = \int \frac{e^x - 0}{1} dx = e^x,$$
und damit die selbstadjungierte Form
$$(e^{e^x} y')' - xe^{e^x} y = 0.$$

2. Für die Besselsche DGL
$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad (x > 0)$$
erhält man
$$s(x) = \int \frac{x - 2x}{x^2} dx = -\ln x,$$
d.h. die DGL ist mit $e^{s(x)} = \frac{1}{x}$ zu multiplizieren; damit ist die selbstadjungierte Form
$$xy'' + y' + (x - \frac{n^2}{x})y = (xy')' + (x - \frac{n^2}{x})y = 0.$$

Selbstadjungierte Differentialoperatoren

Bemerkung: (Integralbeziehung von Differentialausdrücken)

- Verwende das Skalarprodukt für zwei auf $I = [a, b]$ stetige Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$:
$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$
- Mittels partieller Integration (zweifach) erhält man
$$\begin{aligned}(D[u], v) &= \int_a^b [a_0 u'' + a_1 u' + a_2 u]v\,dx \\ &= \int_a^b u[(a_0 v)'' - (a_1 v)' + a_2 v]\,dx + [u' a_0 v]_a^b + [u a_1 v]_a^b - [u(a_0 v)']_a^b \\ &= (u, D^*[v]) + [u' a_0 v]_a^b + [u a_1 v]_a^b - [u(a_0 v)']_a^b.\end{aligned}$$
- Die Beziehung aus der LA
$$(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}))$$
für lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und ihre Adjungierten f^* mit Euklidischem Skalarprodukt lässt sich auf Differentialausdrücke übertragen, falls
$$[u' a_0 v]_a^b + [u a_1 v]_a^b - [u(a_0 v)']_a^b = 0.$$
- Also müssen u, v, a_0, a_1 bestimmte Randbedingungen erfüllen (z.B. $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$). Dann gilt
$$(D[u], v) = (u, D^*[v]).$$

Beobachtung: (Integralbeziehung von selbstadjungierten Differentialausdrücken)
Für selbstadjungierte Differentialausdrücke L vereinfachen sich die Randbedingungen. Es gilt:

$$\begin{aligned}(L[u], v) &= \int_a^b [(pu')' + qu]v\,dx \\ &= \int_a^b (-u'pv' + uqv)\,dx + [pu'v]_a^b \\ &= \int_a^b u[(pv')' + qv]\,dx + [pu'v]_a^b - [upv']_a^b \\ &= (u, L[v]) + [p(u'v - uv')]_a^b.\end{aligned}$$

Die Beziehung $(L[u], v) = (u, L[v])$ gilt, falls
$$[p(x)(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))]_a^b = 0.$$

Satz: (Selbstadjungiertes Sturm-Liouvillsches Eigenwertproblem)
Seien $L[y] = (p(x)y')' + q(x)y$ der für $x \in [a, b]$ definierte Sturm-Liouvillsche Differentialausdruck mit stetig diff'barer Funktion $p(x) > 0$, stetig diff'barer Funktion $q(x)$ und stetiger Funktion $w(x) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ $(k = 1, 2)$.
Dann ist das Sturm-Liouvillsche Eigenwertproblem

$$L[y] + \lambda w(x)y = 0, \quad \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

selbstadjungiert.

Nichttriviale Lösungen $y_\lambda(x)$ zu gegebenen Parametern λ heißen Eigenfunktionen (falls sie existieren). Die entsprechenden Parameter λ heißen dann Eigenwerte des Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblems.

Betrachte: (Randwertproblem)
Zu lösen sei auf dem Intervall $I = [a, b]$

$$\begin{aligned}-L[y] &= \lambda w(x)y, \\ R_1(y) &= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ R_2(y) &= \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.\end{aligned}$$

Dabei sei L ein Sturm-Liouvillscher Differentialausdruck, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ $(k = 1, 2)$, $w(x)$ eine auf I positive stetige Funktion.

Als Definitionsbereich von L wird $C^2([a, b], \mathbb{R})$ angenommen, genauer die Teilmenge $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ von Funktionen, welche die Randbedingungen erfüllen!. Die Elemente aus M heißen Testfunktionen.

Definition: (Selbstadjungierter Differentialoperator)
Sei L ein auf $I = [a, b]$ definierter selbstadjungierter Differentialausdruck 2. Ordnung, und sei $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen, die vorgegebene Randbedingungen an $x = a$ und $x = b$ erfüllen (Testfunktionen).
Gilt für alle $u, v \in M$
$$(L[u], v) = (u, L[v]),$$
so heißt L selbstadjungierter Differentialoperator auf M. Das zugehörige Randwertproblem heißt ebenfalls selbstadjungiert.

Bemerkung: (Integralbeziehung von Differentialausdrücken)

- Verwende das Skalarprodukt für zwei auf $I = [a, b]$ stetige Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\ dx.$$

- Mittels partieller Integration (zweifach) erhält man

$$\begin{aligned} (D[u], v) &= \int_a^b [a_0 u'' + a_1 u' + a_2 u] v\ dx \\ &= \int_a^b u[(a_0 v)'' - (a_1 v)' + a_2 v]\ dx + [u' a_0 v]_a^b + [u a_1 v]_a^b - [u(a_0 v)']_a^b \\ &= (u, D^*[v]) + [u' a_0 v]_a^b + [u a_1 v]_a^b - [u(a_0 v)']_a^b. \end{aligned}$$

- Die Beziehung aus der LA

$$(f(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}))$$

für lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und ihre Adjungierten f^* mit Euklidischem Skalarprodukt lässt sich auf Differentialausdrücke übertragen, falls

$$[u' a_0 v]_a^b + [u a_1 v]_a^b - [u(a_0 v)']_a^b = 0.$$

- Also müssen u, v, a_0, a_1 bestimmte Randbedingungen erfüllen (z.B. $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$). Dann gilt

$$(D[u], v) = (u, D^*[v]).$$

Beobachtung: (Integralbeziehung von selbstadjungierten Differentialausdrücken)
Für selbstadjungierte Differentialausdrücke L vereinfachen sich die Randbedingungen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(L[u],v) &= \int_a^b [(pu')' + qu]v \; dx \\
&= \int_a^b (-u'pv' + uqv) \; dx + [pu'v]_a^b \\
&= \int_a^b u[(pv')' + qv] \; dx + [pu'v]_a^b - [upv']_a^b \\
&= (u, L[v]) + [p(u'v - uv')]_a^b.
\end{aligned}$$

Die Beziehung $(L[u],v) = (u, L[v])$ gilt, falls

$$[p(x)(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))]_a^b = 0.$$

Betrachte: (Randwertproblem)
Zu lösen sei auf dem Intervall $I = [a, b]$

$$\begin{aligned} -L[y] &= \lambda w(x) y, \\ R_1(y) &= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ R_2(y) &= \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{aligned}$$

Dabei sei L ein Sturm-Liouvillscher Differentialausdruck, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ ($k = 1, 2$), $w(x)$ eine auf I positive stetige Funktion.

Als Definitionsbereich von L wird $C^2([a, b], \mathbb{R})$ angenommen, genauer die Teilmenge $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ von Funktionen, welche die Randbedingungen erfüllen!. Die Elemente aus M heißen Testfunktionen.

Definition: (Selbstadjungierter Differentialoperator)
Sei L ein auf $I = [a, b]$ definierter selbstadjungierter Differentialausdruck 2. Ordnung, und sei $M \subset C^2([a, b], \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen, die vorgegebene Randbedingungen an $x = a$ und $x = b$ erfüllen (Testfunktionen).
Gilt für alle $u, v \in M$

$$(L[u], v) = (u, L[v]),$$

so heißt L selbstadjungierter Differentialoperator auf M. Das zugehörige Randwertproblem heißt ebenfalls selbstadjungiert.

Bemerkungen: (Hinreichende Bedingungen für Selbstadjungierte Differentialoperatoren)

1. Falls alle Funktionen in M die Randbedingungen $R_1(y) = R_2(y) = 0$ (s.o.) erfüllen, dann ist L selbstadjungierter Operator auf M.

2. Sei $p(a) = p(b) > 0$ und M die Menge aller Funktionen, welche periodische Randbedingungen erfüllen, d.h.

   $$y \in M \Rightarrow y(a) = y(b) \text{ und } y'(a) = y'(b).$$

   Dann ist L selbstadjungierter Operator auf M.

3. Falls $p(x) > 0$ für $x \in]a, b[$ und $p(a) = p(b) = 0$, dann ist L selbstadjungierter Operator für alle $u, v \in C^2([a, b], \mathbb{R})$.

Satz: (Selbstadjungiertes Sturm-Liouvillsches Eigenwertproblem)
Seien $L[y] = (p(x)y')' + q(x)y$ der für $x \in [a,b]$ definierte Sturm-Liouvillsche Differentialausdruck mit stetig diff'barer Funktion $p(x) > 0$, stetig diff'barer Funktion $q(x)$ und stetiger Funktion $w(x) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_k^2 + \beta_k^2 > 0$ $(k = 1, 2)$.
Dann ist das Sturm-Liouvillsche Eigenwertproblem

$$L[y] + \lambda w(x) y = 0, \quad \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0,\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

selbstadjungiert.

Nichttriviale Lösungen $y_\lambda(x)$ zu gegebenen Parametern λ heißen Eigenfunktionen (falls sie existieren). Die entsprechenden Parameter λ heißen dann Eigenwerte des Sturm-Liouvillschen Eigenwertproblems.


Selbstadjungierte Differentialoperatoren
Selbstadjungierte Differentialausdrücke
Randwertprobleme
Differentialgleichungen I
Rand- und Eigenwertprobleme
Erinnerung Potenzreihen-Ansatz