Differentialgleichungen I

Woche 09 / J. Behrens

TUHH Technische Universität Hamburg

BITTE BEACHTEN SIE DIE 3G-REGEL!
PLEASE OBEY THE 3G RULE!

Zutritt zur Lehrveranstaltung haben nur:

–VOLLSTÄNDIG GEIMPFTE
–GENESENE
–GETESTETE
(negatives Testergebnis ist max. 24 Std. gültig)

Sollten Sie dies nicht nachweisen können, müssen Sie bitte den Raum jetzt verlassen.
Andernfalls droht ein Hausverbot!

Vielen Dank für Ihr Verständnis.
Schützen Sie sich und andere!

Admission to the course is restricted to persons who are:

–FULLY VACCINATED
–RECOVERED
–TESTED
(negative test result is valid for max. 24 hours)

If you cannot prove this, please leave the room now.
Otherwise you could be banned from the room!

Thank you for your understanding.
Protect yourself and others!

(1) Beispiel:

- **Betrachte:** $y'' + y = \cos(2x)$ mit $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

- **Ansatz:** $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

- **Anfangswerte:** $y(0) = 0 \implies a_0 = 0$

  $y'(0) = 1 \implies a_1 = 1$

- **Ableitungen:** $y'(x) = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$

  $y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + 20 a_5 x^3 + \dots$

- Rechte Seite: $\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} \pm \dots$

- Einsetzen in DGL:

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots$$
$$x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$
$$= 1 - 0 \quad \frac{4}{2!}x^2 \quad + \quad \frac{16}{4!}x^4 - \frac{64}{6!}x^6 \pm \dots$$

- Koeffizientenvergleich:

$$2a_2 = 1 \qquad a_2 = \frac{1}{2} \qquad a_0 = 0$$
$$6a_3 + 1 = 0 \qquad a_3 = -\frac{1}{6} \qquad a_1 = 1$$
$$12a_4 + a_2 = -\frac{4}{2!} \implies a_4 = -\frac{5}{24}$$
$$20a_5 + a_3 = 0 \qquad a_5 = \frac{1}{120}$$

- Für $y(x)$:

$$y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{5}{24}x^4 + \frac{x^5}{120} + \dots$$

- Allgemein (aus Koeffizientenvergleich)

$$x^{2j}: \quad a_{2j} + (2+1)(2j+2)\,a_{2j+2} = (-1)^j \frac{2^{2j}}{(2j)!}$$
$$x^{2j+1}: \quad a_{2j+1} + (2j+2)(2j+3)\,a_{2j+3} = 0$$

- Für ungerade Indizes:

$$a_{2j+3} = -\frac{a_{2j+1}}{(2j+2)(2j+3)} \qquad \text{mit } a_1 = 1$$

$$\implies a_{2j+3} = \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+3)!} \qquad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

- Potenzreihe für $\sin x$:

$$a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j+1)!} x^{2j+1} = \sin x$$

- Also: $y(x) = \sin x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + - \dots\right)$
- Analog für gerade Indizes: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{24}x^4 + - \dots = \frac{1}{3}(\cos x - \cos(2x))$
- Lösung insgesamt:

$$y(x) = \sin x + \frac{1}{3}(\cos x - \cos(2x))$$

② Beispiel: (Taylor-Reihe)

- Betrachte: $y' = x + y^2$, $y(0) = 1$
- Ansatz: Taylor-Polynom 4. Grades (Näherung an y)

$\rightarrow$ $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, $y^{IV}(0)$ sukzessive berechnen

- Differenzieren:

$$y'' = 1 + 2yy'$$

$$y''' = 2y'y' + 2yy''$$

$$y^{IV} = 2y''y' + 2y'y'' + 2y'y'' + 2yy'''$$

$$= 6y''y' + 2y'''y$$

- Anfangswerte: $y'(0) = 1$, $y''(0) = 3$, $y'''(0) = 8$

$$y^{IV}(0) = 18 + 16 = 34$$

- <u>Taylorpolynom:</u> $y(x) \approx T_4(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{34}{24}x^4$

in einer Umgebung von $x=0$