

Differentialgleichungen I



Laplace Transformation

Buch Kapitel 11.6-11.9

Motivation

Idee: Wir betrachten das Anfangswertproblem n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit geeigneter rechter Seite r .

Frage: Ist es möglich, eine Transformation $Y(z) = \mathcal{T}[y(t)]$ bzw. $R(z) = \mathcal{T}[r(t)]$ zu finden, für welche auch die Umkehrung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ bzw. $r(t) = \tilde{\mathcal{T}}[R(z)]$ existiert, so dass

$$Y(z) = F[R(z)], \quad F \text{ geeignetes Funktional,}$$

leicht zu lösen ist? Dann wäre die Lösung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ leicht zu erhalten.

Idee: Wir betrachten das Anfangswertproblem n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit geeigneter rechter Seite r .

Frage: Ist es möglich, eine Transformation $Y(z) = \mathcal{T}[y(t)]$ bzw. $R(z) = \mathcal{T}[r(t)]$ zu finden, für welche auch die Umkehrung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ bzw. $r(t) = \tilde{\mathcal{T}}[R(z)]$ existiert, so dass

$$Y(z) = F[R(z)], \quad F \text{ geeignetes Funktional,}$$

leicht zu lösen ist? Dann wäre die Lösung $y(t) = \tilde{\mathcal{T}}[Y(z)]$ leicht zu erhalten.

Definition Laplace-Transformation

Definition: (Laplace-Transformation)
Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die durch

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

mit $z \in \mathbb{C}$ definierte Funktion F heißt **Laplace-Transformierte** von f . Die Abbildung von f auf F heißt **Laplace-Transformation**. Verwende auch die Schreibweise $\mathcal{L}[f(t)]$.

Definition: (exponentielle Ordnung)
Eine Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist von **exponentieller Ordnung** γ , falls Konstanten $M > 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $0 \leq t < \infty$ gilt

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t}.$$

Satz: (Existenz der Laplace-Transformierten)
Sei f in $[0, \infty[$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ . Dann existiert die Laplace-Transformierte $F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > \gamma$.

Definition: (Laplace-Transformation)

Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Die durch

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

mit $z \in \mathbb{C}$ definierte Funktion F heißt **Laplace-Transformierte** von f . Die Abbildung von f auf F heißt **Laplace-Transformation**. Verwende auch die Schreibweise $\mathcal{L}[f(t)]$.

Fragen:

- Für welche f ist die Laplace-Transformierte sinnvoll?
- Unter welchen Umständen existiert das uneigentliche Integral?

Definition: (exponentielle Ordnung)

Eine Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist von **exponentieller Ordnung** γ , falls Konstanten $M > 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $0 \leq t < \infty$ gilt

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}.$$

Bemerkungen:

- Polynome sind von exp. Ordnung.
- sin und cos sind von exp. Ordnung.

Beispiel: Verwende Taylor-Reihe für $t \geq 0$:

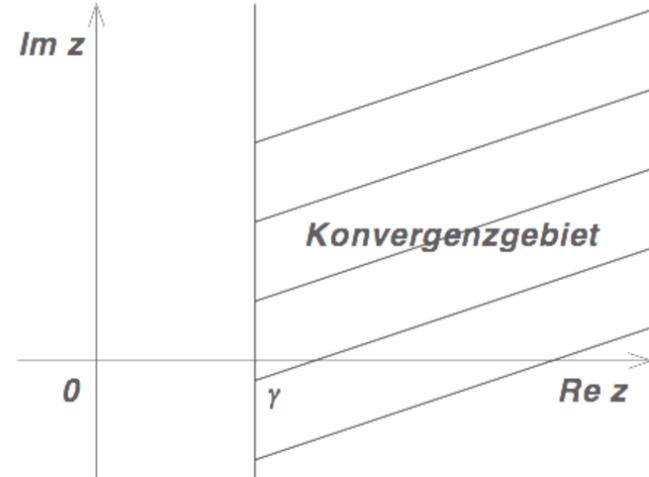
$$|t^3| = t^3 \leq 6e^t = 6 + 6t + 3t^2 + t^3 + \dots$$

Satz: (Existenz der Laplace-Transformierten)

Sei f in $[0, \infty[$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ . Dann existiert die Laplace-Transformierte $F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > \gamma$.

Beobachtungen:

- Das Integral $\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$ existiert also in einer rechten Halbebene der Gaußschen Zahlenebene.
- Je schwächer $f(t)$ für $t \rightarrow \infty$ wächst, desto weiter reicht der Konvergenzbereich nach links.



Inverse Laplace-Transformation

Satz: (Invertierbarkeit für die Laplace-Transformation)
Sei f von exponentieller Ordnung γ , f verschwindet für $t < 0$ und sei in \mathbb{R} stückweise glatt. Dann gilt für alle $z = \text{Re}z > \gamma$

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma - i\infty - \epsilon}^{\sigma + i\infty - \epsilon} F(z) e^{zt} dz = \begin{cases} f(t) & (t > 0), \\ \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} & (t = 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases}$$

Insbesondere gilt in jedem Stetigkeitspunkt t von f

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma - i\infty - \epsilon}^{\sigma + i\infty - \epsilon} F(z) e^{zt} dz = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma - i\infty - \epsilon}^{\sigma + i\infty - \epsilon} F(z + i\epsilon) e^{(z+i\epsilon)t} dz$$

für $\sigma > \gamma$.

Satz: (Eindeutigkeitssatz für die Laplace-Transformation)
Seien f_1 und f_2 von exponentieller Ordnung γ , f_1, f_2 verschwinden für $t < 0$ und seien in \mathbb{R} stückweise glatt. Es gelte weiter für die Laplace-Transformierten $F_1(z) = F_2(z)$ für $\text{Re}z > \gamma$.
Dann gilt für jeden Punkt t , an dem f_1 und f_2 stetig sind,

$$f_1(t) = f_2(t).$$

Bemerkungen:

- Die beiden Sätze erlauben die Berechnung von $f(t)$ aus einer Laplace-Transformierten $F(z)$ mittels Kurvenintegral in der Gaußschen Zahlenebene.
- Die Laplace-Transformation $f(t) \rightarrow F(z)$ ist eine eindeutige Abbildung.

Beispiel: Zu

$$f(t) = e^{4t}$$

ist die eindeutige Laplace-Transformierte

$$F(z) = \frac{1}{z-4}.$$

Satz: (Umkehrsatz für die Laplace-Transformation)

Sei f von exponentieller Ordnung γ , f verschwinde für $t < 0$ und sei in \mathbb{R} stückweise glatt. Dann gilt für alle $x = \operatorname{Re}z > \gamma$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z)e^{zt} dz &= \\ \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x+is)e^{(x+is)t} ds &= \begin{cases} \frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & (t > 0), \\ \frac{f(0+0)}{2} & (t = 0), \\ 0 & (t < 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt in jedem Stetigkeitspunkt t von f

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{x-iA}^{x+iA} F(z)e^{zt} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A F(x+is)e^{(x+is)t} ds \end{aligned}$$

für $x > \gamma$.

Satz: (Eindeutigkeitssatz für die Laplace-Transformation)

Seien f_1 und f_2 von exponentieller Ordnung γ , f_1, f_2 verschwinden für $t < 0$ und seien in \mathbb{R} stückweise glatt. Es gelte weiter für die Laplace-Transformierten $F_1(x) = F_2(x)$ für $\operatorname{Re}z > \gamma$.

Dann gilt für jeden Punkt t , an dem f_1 und f_2 stetig sind,

$$f_1(t) = f_2(t).$$

Bemerkungen:

- Die beiden Sätze erlauben die Berechnung von $f(t)$ aus einer Laplace-Transformierten $F(z)$ mittels Kurvenintegral in der Gaußschen Zahlenebene.
- Die Laplace-Transformation $f(t) \rightarrow F(z)$ ist eine eindeutige Abbildung.

Beispiel: Zu

$$f(t) = e^{4t}$$

ist die eindeutige Laplace-Transformierte

$$F(z) = \frac{1}{z - 4}.$$

Rechenregeln der Laplace-Transformation

Wiederholung: Mit Anzeichen mit $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ die Laplace-Transformierte einer in \mathbb{R}_+ lokal integrierbaren Funktion von exponentieller Ordnung γ .

Satz (Linearität)
Seien f und g in \mathcal{D}_γ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ . Dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(af + bg)(s) = a\mathcal{L}f(s) + b\mathcal{L}g(s).$$

Beweis folgt unmittelbar aus Linearität des Integrals.

Satz (Laplace-Transformation eines Produktes mit einer Heavisidefunktion)
Sei $g(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ und f Laplace-transformierbar mit der Laplace-Transformierten $F(s) = \mathcal{L}f(s)$. Dann gilt:

$$\mathcal{L}(g \cdot f)(s) = \mathcal{L}f(s) = F(s).$$

Satz (Laplace-Transformation einer T-periodischen Funktion)
Sei f T-periodisch (d.h. $f(t+T) = f(t)$), stückweise stetig und beschränkt. Dann gilt für $\text{Re } s > 0$:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Satz (Verschiebung)
Seien f und g Funktionen von exponentieller Ordnung γ mit $f(t) = g(t)$ für $t < 0$. Sei f stetig und g stückweise stetig auf \mathbb{R}_+ . Dann existiert die Laplace-Transformierte der Faltung $f * g$ für $\text{Re } s > \gamma$ und es gilt:

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}f(s) \cdot \mathcal{L}g(s).$$

Definition (Faltung)
Seien f und g Funktionen. Das Faltungsprodukt von f und g ist allgemein definiert als:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Bemerkungen:

- Wir zeigen jeweils, dass die ungerichtete Integral existiert.
- Für f und g Funktionen mit in der Laplace-Transformation gilt $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$ (siehe 11.4).

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

Satz (Transformation der Ableitung und des Integrals)

1. Sei f wie im vorigen Satz. Dann gilt für $\text{Re } s > \gamma$:
 $\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0).$
2. Sei f ($h-1$)-mal stetig differenzierbar und $f^{(h-1)}$ stückweise glatt. Seien $f, f', \dots, f^{(h-1)}$ von exponentieller Ordnung γ . Dann gilt für $\text{Re } s > \gamma$:
 $\mathcal{L}f^{(h)}(s) = s^h \mathcal{L}f(s) - s^{h-1}f(0) - \dots - f^{(h-1)}(0).$
3. Sei f wie in 1. Dann gilt für $\text{Re } s > \gamma$:

$$\mathcal{L} \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{s} \mathcal{L}f(s).$$

Satz (Transformation der Ableitung einer unstetigen Funktion) Sei f wieder eine Funktion von exponentieller Ordnung γ mit den weiteren Voraussetzungen des Satzes, und habe f an der Stelle $t = a > 0$ eine Unstetigkeit in Form einer Sprungstelle. Dann gilt:

$$\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0) - [f(a+) - f(a-)]e^{-as}.$$

Beweisskizze: spalte das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

auf in $\int_0^a e^{-st} f'(t) dt + \int_a^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$, verfähre analog zum Satz oben.

Satz (Dämpfung, Verschiebung, Streckung)

Sei f wieder eine Funktion von exponentieller Ordnung γ mit den weiteren Voraussetzungen des Satzes. $F(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$, $\text{Re } s > \gamma$.

1. Ein Dämpfungsfaktor e^{-at} im Originalbereich bewirkt eine Verschiebung im Bildbereich:
 $\mathcal{L}(e^{-at} f(t)) = F(s+a)$ für $\text{Re } s > \gamma - a$.
2. Für $a > 0$ gilt:
 $\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ für $\text{Re } s > a\gamma$.



Vorbemerkung: Wir bezeichnen mit $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$ die Laplace-Transformierte einer in $[0, \infty[$ stückweise stetigen Funktion von exponentieller Ordnung γ .

Satz: (Linearität)

Seien f und g in $[0, \infty[$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ .
Dann gilt für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)].$$

Beweis folgt unmittelbar aus Linearität des Integrals.

Satz: (Transformation der Ableitung und des Integrals)

1. Sei f wie im vorigen Satz. Dann gilt für $\operatorname{Re}z > \gamma$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = z\mathcal{L}[f(t)] - f(0).$$

2. Sei f $(k - 1)$ -mal stetig differenzierbar und $f^{(k-1)}$ stückweise glatt. Seien $f, f', \dots, f^{(k-1)}$ von exponentieller Ordnung γ . Dann gilt für $\operatorname{Re}z > \gamma$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = z^k \mathcal{L}[f(t)] - z^{k-1} f(0) - \dots - f^{(k-1)}(0).$$

3. Sei f wie in 1. Dann gilt für $\operatorname{Re}z > \gamma$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{z} \mathcal{L}[f(t)].$$

Beweis:

$$\begin{aligned} z\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty z e^{-zt} f'(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{-zt} f(t)) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-zt} f(t) - e^{-z \cdot 0} f(0) \\ &= -f(0) + z \mathcal{L}[f(t)] \end{aligned}$$

1. Schritt: Integration durch partielle Integration mit $u = f(t)$, $dv = z e^{-zt} dt$.
2. Schritt: Anwendung des Grenzwertsatzes von L'Hôpital.

Beweis:

1. Folgt aus der Definition der Laplace-Transformierten mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-zt} f'(t) dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-zt} f(t) \Big|_{t=0}^{t=A} - \int_0^{\infty} (-z) e^{-zt} f(t) dt \\ &= -f(0) + z \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt = z\mathcal{L}[f(t)] - f(0).\end{aligned}$$

2. k -maliges Anwenden der obigen partiellen Integration führt zur Aussage.
3. Wende 1. auf die Funktion $h(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ an.

Satz: (Transformation der Ableitung einer unstetigen Funktion) Sei f wieder eine Funktion von exponentieller Ordnung γ mit den weiteren Voraussetzungen des Satzes, und habe f an der Stelle $t = a > 0$ eine Unstetigkeit in Form einer Sprungstelle. Dann gilt

$$\mathcal{L}[f'(t)] = z\mathcal{L}[f(t)] - f(0) - [f(a+0) - f(a-0)]e^{-az}.$$

Beweisskizze: spalte das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-z} f'(t) dt$$

auf in $\int_0^{a-0}(\cdot) + \int_{a+0}^{\infty}(\cdot)$, verfare ansonsten analog zum Satz oben.

Satz: (Dämpfung-Verschiebung, Streckung)

Sei f wieder eine Funktion von exponentieller Ordnung γ mit den weiteren Voraussetzungen des Satzes, $F(z) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-z} f(t) dt$, $\operatorname{Re} z > \gamma$.

1. Ein Dämpfungsfaktor e^{-at} im Originalbereich bewirkt eine Verschiebung im Bildbereich:

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(z + a) \quad \text{für } \operatorname{Re} z > \gamma - a.$$

2. Für $a > 0$ gilt

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{z}{a}\right) \quad \text{für } \operatorname{Re} z > a \cdot \gamma.$$

Definition: (Faltung)

Seien f und g Funktionen. Das **Faltungsprodukt** von f und g ist allgemein definiert als

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen:

- Wir setzen jeweils voraus, dass das uneigentliche Integral existiert.
- Für f und g Funktionen wie in der Laplace-Transformation gilt $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Daher ist dann

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau$$

Satz: (Faltungsregel)

Seien f und g Funktionen von exponentieller Ordnung γ mit $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$. Sei f stetig und g stückweise stetig auf \mathbb{R} . Dann existiert die Laplace-Transformierte der Faltung $f * g$ für $\operatorname{Re}z > \gamma$ und es gilt

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)]$$

Satz: (Laplace-Transformation einer T -periodischen Funktion)

Sei f T -periodisch (d.h. $f(t - T) = f(t)$), stückweise stetig und beschränkt.

Dann gilt für $\operatorname{Re} z > 0$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Tz}} \int_0^T e^{-zu} f(u) du.$$

Satz: (Laplace-Transformation eines Produktes mit einer Potenzfunktion)

Sei $g(t) = (-1)^n t^n f(t)$ und f Laplace-transformierbar mit der Laplace-Transformierten $F(z) = \mathcal{L}[f(t)]$. Dann gilt

$$\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(z).$$

Lösung von DGLn mittels Laplace-Transformation

Idee: Gegeben sei das Anfangswertproblem n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit r stückweise stetiger Funktion von exponentieller Ordnung.

Setze

$$Y(z) = \mathcal{L}[y(t)], \quad \text{und} \quad R(z) = \mathcal{L}[r(t)].$$

Die Laplace-Transformation des AWP ergibt nach Rechenregel

$$\begin{aligned} (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)Y(z) &= R(z) \\ \Rightarrow Y(z) &= (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)^{-1}R(z) =: G(z)R(z). \end{aligned}$$

Findet man eine Funktion $g(t)$ mit $\mathcal{L}[g(t)] = G(z)$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= Y(z) = G(z)R(z) = \mathcal{L}[g(t)]\mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}[(g * r)(t)] \\ \Rightarrow y(t) &= (g * r)(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die Funktion $K(t, \tau) := g(t - \tau)$ heißt **Greensche Funktion**.

1

Idee: Gegeben sei das Anfangswertproblem n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0,$$

mit r stückweise stetiger Funktion von exponentieller Ordnung.

Setze

$$Y(z) = \mathcal{L}[y(t)], \quad \text{und} \quad R(z) = \mathcal{L}[r(t)].$$

Die Laplace-Transformation des AWP ergibt nach Rechenregel

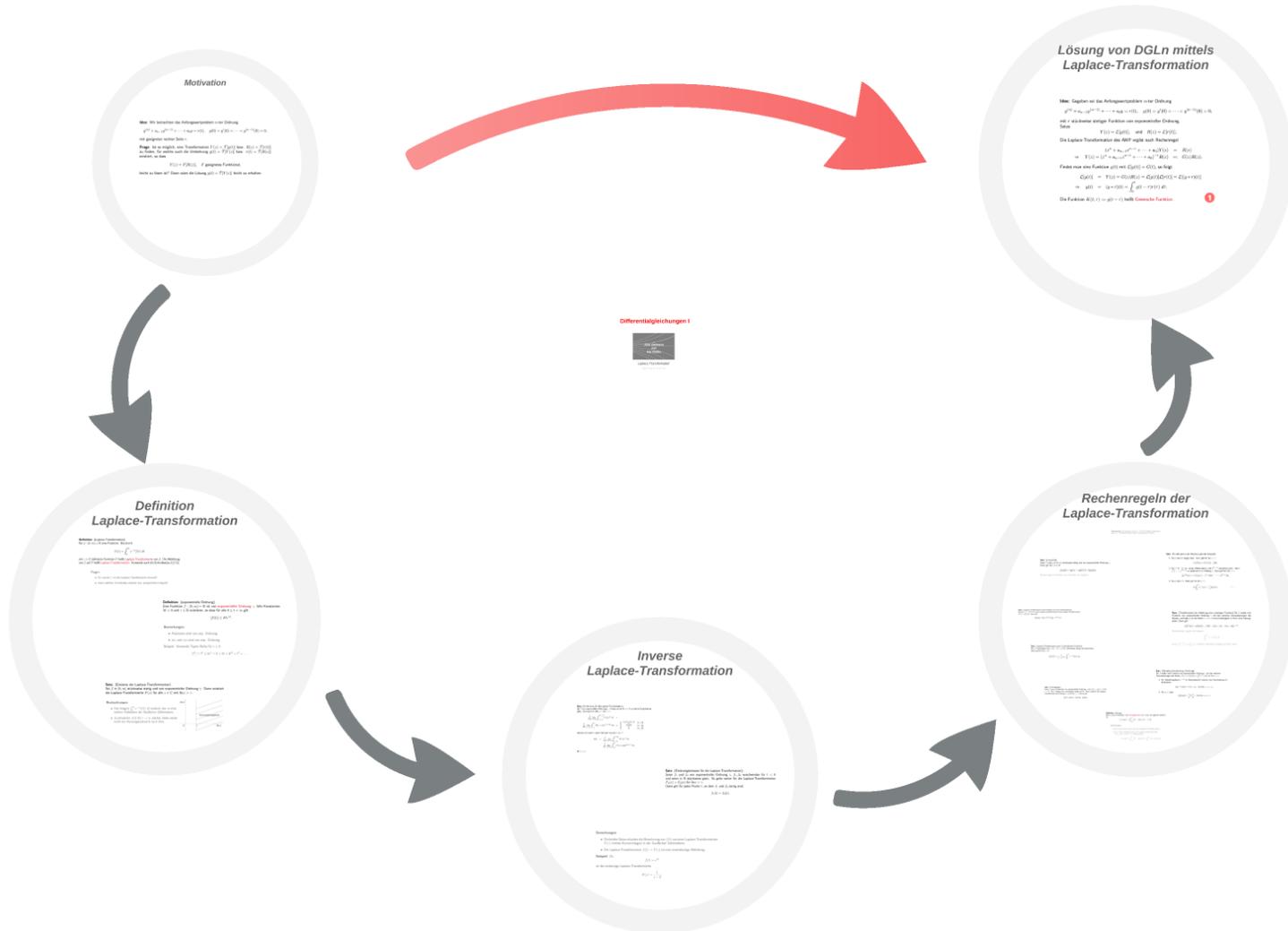
$$\begin{aligned} (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)Y(z) &= R(z) \\ \Rightarrow Y(z) &= (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)^{-1}R(z) =: G(z)R(z). \end{aligned}$$

Findet man eine Funktion $g(t)$ mit $\mathcal{L}[g(t)] = G(z)$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= Y(z) = G(z)R(z) = \mathcal{L}[g(t)]\mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}[(g * r)(t)] \\ \Rightarrow y(t) &= (g * r)(t) = \int_0^t g(t - \tau)r(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die Funktion $K(t, \tau) := g(t - \tau)$ heißt **Greensche Funktion**.

1



Motivation

Wsk: Die Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Funktion $f(t)$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ zuordnet. Die Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Funktion $f(t)$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ zuordnet. Die Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Funktion $f(t)$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ zuordnet.

Lösung von DGLn mittels Laplace-Transformation

Wsk: Gegeben sei die Anfangswertproblem einer Ordnung n mit Anfangswerten $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ und einer rechten Seite $f(t)$. Die Laplace-Transformation des DGL ergibt nach Rechenregel $\mathcal{L}\{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Die Laplace-Transformation des DGL ergibt nach Rechenregel $\mathcal{L}\{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Die Laplace-Transformation des DGL ergibt nach Rechenregel $\mathcal{L}\{y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Differentialgleichungen I



Definition Laplace-Transformation

Wsk: Die Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Funktion $f(t)$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ zuordnet. Die Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Funktion $f(t)$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ zuordnet. Die Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Funktion $f(t)$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ zuordnet.

Inverse Laplace-Transformation

Wsk: Die Inverse Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}^{-1}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Laplace-Transformierten $F(s)$ die ursprüngliche Funktion $f(t)$ zuordnet. Die Inverse Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}^{-1}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Laplace-Transformierten $F(s)$ die ursprüngliche Funktion $f(t)$ zuordnet. Die Inverse Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}^{-1}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Laplace-Transformierten $F(s)$ die ursprüngliche Funktion $f(t)$ zuordnet.

Rechenregeln der Laplace-Transformation

Wsk: Die Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Funktion $f(t)$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ zuordnet. Die Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Funktion $f(t)$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ zuordnet. Die Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, die einer Funktion $f(t)$ die Laplace-Transformierte $F(s)$ zuordnet.