Differentialgleichungen I

Woche 07 / J. Behrens

TUHH Technische Universität Hamburg

BITTE BEACHTEN SIE DIE 3G-REGEL!
PLEASE OBEY THE 3G RULE!

Zutritt zur Lehrveranstaltung haben nur:

- VOLLSTÄNDIG GEIMPFTE
- GENESENE
- GETESTETE

(negatives Testergebnis ist max. 24 Std. gültig)

Sollten Sie dies nicht nachweisen können, müssen Sie bitte den Raum jetzt verlassen.
Andernfalls droht ein Hausverbot!

Vielen Dank für Ihr Verständnis.
Schützen Sie sich und andere!

Admission to the course is restricted to persons who are:

- FULLY VACCINATED
- RECOVERED
- TESTED

(negative test result is valid for max. 24 hours)

If you cannot prove this, please leave the room now.
Otherwise you could be banned from the room!

Thank you for your understanding.
Protect yourself and others!

(1)

Ansatz:
Sei $R_m(x)$ ein Polynom m-ten Grades, $m \in \mathbb{N}$ und seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Betrachte rechte Seiten der Form

$$R_m(x), \quad R_m(x)e^{\alpha x}, \quad R_m(x)\sin(\beta x), \quad R_m(x)\cos(\gamma x).$$

Verwende dann für die partikuläre Lösung den Ansatz nach Art der rechten Seite.

Beispiel: Betrachte $y'' + 5y' + 6y = \underbrace{xe^{-x}}_{(*)}$

Ansatz nach der rechten Seite: $y_p(x) = ae^{-x} + bxe^{-x}$ (*)

Ableitungen: $y_p'(x) = -ae^{-x} + be^{-x} - bxe^{-x}$ (**)

$y_p''(x) = ae^{-x} - be^{-x} - be^{-x} + bxe^{-x} = ae^{-x} - 2be^{-x} + bxe^{-x}$ (***)

Einsetzen:

$$ae^{-x} - 2be^{-x} + bxe^{-x} - 5ae^{-x} + 5be^{-x} - 5bxe^{-x} + 6ae^{-x} + 6bxe^{-x} = xe^{-x}$$

$$\Rightarrow (2a + 3b)e^{-x} + 2bxe^{-x} = xe^{-x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2a + 3b)}_{\text{Es muss } \overset{!}{=} 0} e^{-x} + \underbrace{(2b - 1)}_{\overset{!}{=} 0} xe^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow 2a = -\frac{3}{2} \qquad b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

Allgem. Lösung:
$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}}_{\text{homog. Lösungen}} + \underbrace{\frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{3}{4}e^{-x}}_{\text{part. Lösung.}}$$

② Zu den Resonanz-Lösungen:

Beispiel:
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = g(x)$$
$$g(x) = Ae^{\lambda x} \quad , \quad A, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ansatz:
$$y_p(x) = Be^{\lambda x}$$

Einsetzen:
$$BP(\lambda)e^{\lambda x} = Ae^{\lambda x}$$
$P(\lambda)$ charakt. Polynom

Partikul. Lösung: $(P(\lambda) \neq 0)$
$$y_p(x) = Be^{\lambda x} = \frac{A}{P(\lambda)}e^{\lambda x}$$

Interpretation: D.h. dieser Ansatz ist nur möglich, falls $P(\lambda) \neq 0$, d.h. y ist keine Nullstelle des charakt. Polynoms, damit auch keine Lösung der homogenen Gleichung
$\Rightarrow$ keine Resonanzlösung!

Falls λ k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$ ist, so wähle Ansatz

$$y_p(x) = B x^k e^{\lambda x}$$

Einsetzen: $y_p(x) = B x^k e^{\lambda x} = \dfrac{A}{P^{(k)}(\lambda)} x^k e^{\lambda x}$

Konkret: Betrachte $\quad y'' - y = 4e^x$

Auswertung des charakt. Polynoms: $\quad \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

Fundamentallösung der homog. Gl.: $\quad y_1(x) = e^x, \; y_2(x) = e^{-x}$

Beobachtung: Da die rechte Seite der Gleichung Lösung der homog. DGL ist $\Rightarrow$ Resonanzfall.

$\lambda = 1 \quad$ hat Vielfachheit 1

Ansatz: $\quad y_p(x) = a x e^x$

Einsetzen: $\quad y_p'(x) = \underline{a e^x} + a x e^x, \; y_p''(x) = a e^x + a e^x + a x e^x$

$$\Rightarrow 2a e^x + \underline{a x e^x} - \underline{a x e^x} = 4 e^x$$

$$\Rightarrow \quad a = 2$$

Allgem. Lösung: $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + 2x e^{x}$

(3) **Beobachtung**: (Struktur der Gleichung)
Wenn

$$y' + xy = x$$

gilt, dann auch wenn sie differenziert wird, also

$$y'' + y + xy' = 1.$$

Und $y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$ ist auch Lösung dieser DGL 2. Ordnung.

Betrachte jetzt:

$$y'' + xy' + y = 0 \qquad (*)$$

$$y' + xy = x \qquad (**)$$

Bemerkung: Falls (*) und (**) dasselbe Problem im Rahmen einer mathematischen Modellierung beschreiben, so gilt es die "richtige" Lösung zu finden

Lösung von (**): $y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$

Lösung von (*):

1. homogene DG: $y'' + xy' + y = 0$.

   $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ist bereits bekannt

Ziel: finde 2. Fundamentallösung

Suche $v(x)$ mit dem Ansatz $v(x) = w(x) \cdot u(x)$ (Methode der Reduktion der Ordnung)

Erhalte:

$$w''u + 2w'u' + wu'' + xw'u + xwu' + wu$$

$$= w''wu + 2w'u' + xw'u + w\underbrace{(u'' + xu' + u)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow w''u + (2u' + xu)w' = 0$$

Substitution: $\Omega = w'$,

$$\Rightarrow \Omega' u + (2u' + xu)\Omega = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega'}{\Omega} = -\frac{2u' + xu}{u}$$

Einsetzen von $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{\Omega'}{\Omega} = x \quad \Rightarrow \Omega = c^* e^{\frac{x^2}{2}}$$

Integrieren: $w(x) = c^* \int_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi \Rightarrow v(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi\right]$

Partikuläre Lösung: $y_p(x) = 1$

Allgemeine Lösung: $z(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x) + 1$

Bleibt z.z.: u, v bilden Fundamentalsystem

$$\underline{W}(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x^2}{2}} & e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi \\ -xe^{-\frac{x^2}{2}} & 1 - xe^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi \end{vmatrix}$$

Für $x = 0 \Rightarrow \underline{W}(x) = 1 \neq 0$, d.h. u, v bilden Fundamentalsyst.

Beobachtung: $z(x)$ ist nur dann Lösung von (**), wenn $c_2 = 0$ ist!