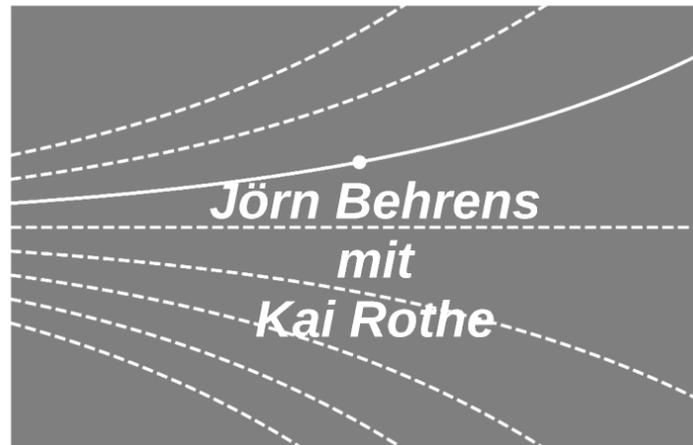


# Differentialgleichungen I



Weitere Lösungsverfahren für lineare DGLn

Buch Kapitel 6.8-6.9

# Erinnerung

## Zusammenfassung:

Ist  $\lambda$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen DGL, dann gilt:

1. Hat  $\lambda$  die algebraische Vielfachheit  $r \geq 1$ , dann sind

$$y_i(x) = e^{\lambda x}, \dots, y_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x}$$

Fundamentallösungen der DGL.

2. Ist  $\lambda = a + ib$  komplex und hat die algebraische Vielfachheit  $r \geq 1$ , dann sind

$$z_1(x) = e^{\lambda x}, \dots, z_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad w_1(x) = e^{\bar{\lambda}x}, \dots, w_r(x) = x^{r-1} e^{\bar{\lambda}x}$$

komplexe Fundamentallösungen. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \cos bx, \dots, y_r(x) = x^{r-1} e^{ax} \cos bx \\ y_{r+1}(x) &= e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2r}(x) = x^{r-1} e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

reelle Fundamentallösungen der homogenen DGL sind.

## Verallgemeinerung: (Lösung der inhomogenen DGL $n$ -ter Ordnung)

- Für Gleichung  $n$ -ter Ordnung erhalten wir lin. unabhängige Lösungen  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  der homogenen Gleichung und variieren  $C_1(x), \dots, C_n(x)$ .

- Entsprechend muss man die Annahmen treffen

$$C'_k(x)y_1^{(k)} + \dots + C'_n(x)y_n^{(k)} = 0 \quad (k = 0, \dots, n-2).$$

- Außerdem erhalten wir

$$C'_1(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C'_n(x)y_n^{(n-1)} = g(x).$$

- Es ergibt sich also ein lin. Gleichungssystem für  $C'_1(x), \dots, C'_n(x)$ :

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ \vdots \\ C'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Wronski-Matrix ist regulär, also lösbar!

- Integration führt dann zur gesuchten Lösung.

**Zusammenfassung:**

Ist  $\lambda$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen DGL, dann gilt:

1. Hat  $\lambda$  die algebraische Vielfachheit  $r \geq 1$ , dann sind

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \dots, y_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x}$$

Fundamentallösungen der DGL.

2. Ist  $\lambda = a + ib$  komplex und hat die algebraische Vielfachheit  $r \geq 1$ , dann sind

$$z_1(x) = e^{\lambda x}, \dots, z_r(x) = x^{r-1} e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad w_1(x) = e^{\bar{\lambda} x}, \dots, w_r(x) = x^{r-1} e^{\bar{\lambda} x}$$

komplexe Fundamentallösungen. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{ax} \cos bx, \dots, y_r(x) = x^{r-1} e^{ax} \cos bx \\ y_{r+1}(x) &= e^{ax} \sin bx, \dots, y_{2r}(x) = x^{r-1} e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

reelle Fundamentallösungen der homogenen DGL sind.

**Verallgemeinerung:** (Lösung der inhomogenen DGL  $n$ -ter Ordnung)

- Für Gleichung  $n$ -ter Ordnung erhalten wir lin. unabhängige Lösungen  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  der homogenen Gleichung und variieren  $C_1(x), \dots, C_n(x)$ .
- Entsprechend muss man die Annahmen treffen

$$C_1'(x)y_1^{(k)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(k)} = 0 \quad (k = 0, \dots, n-2).$$

- Außerdem erhalten wir

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = g(x).$$

- Es ergibt sich also ein lin. Gleichungssystem für  $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ :

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

**Bemerkung:** Wronski-Matrix ist regulär, also lösbar!

- Integration führt dann zur gesuchten Lösung.

# DGLn mit einfachen Inhomogenitäten

**Bemerkung:**  
Variation der Konstanten ergibt immer eine partikuläre Lösung.  
Vereinfachung ist möglich bei bestimmten rechten Seiten!

**Ansätze** (Tabelle für verschiedene rechte Seiten)  
Seien  $R_n(x)$ ,  $S_n(x)$ ,  $T_n(x)$ , und  $Q_n(x)$  Polynome  $n$ -ten Grads. Für rechte Seiten der Art

$$R_n(x), R_n(x)e^{ax}, R_n(x)\sin(\beta x), R_n(x)\cos(\gamma x)$$

$(a, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$  wählt man folgende Ansätze für die partikulären Lösungen:

**Ansätze für partikuläre Lösungen:**

$g(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	Ansatz im Resonanzfall
$R_n(x)$	$T_n(x)$	Wenn ein Summand des Ansatzes
$R_n(x)e^{ax}$	$T_n(x)e^{ax}$	Lösung der homogenen Gleichung
$R_n(x)\sin(\beta x)$	$T_n(x)\cos(\beta x)$	ist, wird der Ansatz $n$ -fach mit
$R_n(x)\cos(\beta x)$	$T_n(x)\sin(\beta x)$	$\pm$ multipliziert.
	$+Q_n(x)\cos(\beta x)$	Nach dem Summand mehr Lösung
		der homogenen Gleichung ist.
Kombination dieser Funktionen	Kombination der Ansätze	Obige Regel ist nur auf den Teil des Ansatzes anzuwenden, der den Resonanzfall enthält.

2

**Beispiel (Resonanzfall)**  
Betrachte ein ungedämpftes Schwingungssystem

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin(\omega t)$$

**Bemerkung:** Falls die Gleichung die Form  $y'' + \omega_0^2 y = K \sin(\omega t)$ ,  $\omega > 0$ ,  $\omega_0 > 0$  erhält man ein periodisches System.

- Charakteristisches Polynom ( $r = 0$ ):  $P(r) = r^2 + \omega_0^2 = 0$
- Nullstellen von  $P(r)$ :  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$
- Allgemeine Lösung des homogenen Problems:  $y_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$
- Ansatz ( $\omega \neq \omega_0$ ):  $y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$   
 $\Rightarrow y_p(t) = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$

- Allgemeine Lösung des inhomogenen Problems:  
 $y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$

**Beispiel (Resonanzfall)**

Falls  $\omega = \omega_0$ , dann ist  $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  Lösung des homogenen Systems.

- Wähle Ansatz:  $y_p(t) = At \cos(\omega t) + Bt \sin(\omega t)$   
 $\Rightarrow y_p(t) = -\frac{K}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t)$

- Man spricht vom **Resonanzfall**, da die Amplitude von  $y_p$  wie  $t$  wächst. Die Frequenz  $\omega$  der rechten Seite (äußere Kraft) stimmt mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$  des ungedämpften Systems überein.



**Definition: (Resonanz)**

Wenn die rechte Seite oder ein Summand der rechten Seite der DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = g(x)$$

Fundamentallösung der homogenen zugehörigen DGL ist, so spricht man von **Resonanz**.

**Bemerkung:**

Variation der Konstanten ergibt immer eine partikuläre Lösung.  
Vereinfachung ist möglich bei bestimmten rechten Seiten!

**Ansatz:**

Sei  $R_m(x)$  ein Polynom  $m$ -ten Grades,  $m \in \mathbb{N}$  und seien  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .  
Betrachte rechte Seiten der Form

$$R_m(x), \quad R_m(x)e^{\alpha x}, \quad R_m(x) \sin(\beta x), \quad R_m(x) \cos(\gamma x).$$

Verwende dann für die partikuläre Lösung den **Ansatz nach Art der rechten Seite**.

1

**Beispiel:** (Resonanzfall)

Betrachte ein ungedämpftes Schwingungsproblem

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin(\omega t).$$

**Bemerkung:** Falls die Gleichung die Form  $y'' + ry' + \omega_0^2 y = K \sin(\omega t)$ ,  $r > 0$ , so erhält man ein gedämpftes System.

- Charakteristisches Polynom ( $r = 0$ ):  $P(\lambda) = \lambda^2 - \omega_0^2$ .
- Nullstellen von  $P(\lambda)$ :  $\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i$ .
- Allgemeine Lösung des homogenen Problems:  $y_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$ .
- Ansatz ( $\omega \neq \omega_0$ ):  $y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t).$$

- Allgemeine Lösung des inhomogenen Problems:

$$y(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t).$$

**Beispiel:** (Resonanzfall)

Falls  $\omega = \omega_0$ , dann ist  $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$  Lösung des homogenen Systems.

- Wähle Ansatz:  $y_p(t) = At \cos(\omega t) + Bt \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow y_p(t) = -\frac{K}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t).$$

- Man spricht vom **Resonanzfall**, da die Amplitude von  $y_p$  wie  $t$  wächst. Die Frequenz  $\omega$  der rechten Seite (äußere Kraft) stimmt mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$  des ungedämpften Systems überein.



**Definition:** (Resonanz)

Wenn die rechte Seite oder ein Summand der rechten Seite der DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = g(x)$$

Fundamentallösung der homogenen zugehörigen DGL ist,  
so spricht man von **Resonanz**.

**Ansätze:** (Tabelle für verschiedene rechte Seiten)

Seien  $R_m(x)$ ,  $S_m(x)$ ,  $T_m(x)$ , und  $Q_m(x)$  Polynome  $m$ -ten Grades. Für rechte Seiten der Art

$$R_m(x), \quad R_m(x)e^{\alpha x}, \quad R_m(x)\sin(\beta x), \quad R_m(x)\cos(\gamma x)$$

$(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$  wählt man folgende Ansätze für die partikulären Lösungen:

<b>Ansätze für partikuläre Lösungen:</b>		
$g(x)$	Ansatz für $y_p(x)$	Ansatz im Resonanzfall
$R_m(x)$	$T_m(x)$	Wenn ein Summand des Ansatzes Lösung der homogenen Gleichung ist, wird der Ansatz so oft mit $x$ multipliziert, bis kein Summand mehr Lösung der homogenen Gleichung ist.
$R_m(x)e^{\alpha x}$	$T_m(x)e^{\alpha x}$	
$R_m(x)\sin(\beta x)$	$T_m(x)\sin(\beta x)$	
$R_m(x)\cos(\beta x)$	$+Q_m(x)\cos(\beta x)$	
Kombination dieser Funktionen	Kombination der Ansätze	Obige Regel ist nur auf den Teil des Ansatzes anzuwenden, der den Resonanzfall enthält.



# Allgemeine Warnung

## Beobachtung: (Struktur der Lösung)

- Homogenes LGS DGL  $n$ ter Ordnung hatte genau  $n$  linear unabhängige Fundamentalslösungen.
- Inhomogenes LGS DGL  $n$ ter Ordnung hatte allgemeine Lösung der Form  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$  mit  $y_h(x)$  Linearkombination der Fundamentalslösungen und  $y_p(x)$  irgendeine Lösung der inhomogenen DGL.
- Lösung betrachtet:  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = g(x)$ , wobei  $a_n(x) = 1$  angenommen wurde. Wobei  $a_i(x) \neq 0$ , aber  $a_i(x) = 0$  für alle  $x \in D$ , so kann man auf  $A$  durch  $a_i(x) = 0$  setzen und erhält die folgende Struktur.
- Falls  $a_i(x) = 0$ , so ändert sich die Ordnung der DGL, und damit auch die Struktur (man verliert eine Fundamentallösung).

## Beobachtung: (Struktur der Gleichung)

Betrachte die DGL erster Ordnung

$$y' + xy = x$$

- Lösung der homogenen DGL (Trennung der Variablen):  $y_h(x) = ce^{-x/2}$ .
- Partikuläre Lösung (Variation der Konstanten):  $y_p(x) = 1$ .
- Allgemeine Lösung:  $y(x) = ce^{-x/2} + 1$ .

## Beobachtung: (Struktur der Gleichung)

Wenn

$$y' + xy = x$$

gilt, dann auch wenn sie differenziert wird, also

$$y'' + y + xy' = 1.$$

Und  $y(x) = ce^{-x/2} + 1$  ist auch Lösung dieser DGL 2. Ordnung.

3

**Warnung:** (Struktur der Gleichung)  
Bei der Umformung von mathematischen Modellen (beispielsweise bei DGLn durch differenzieren) muss die Lösungsmenge gleich bleiben!

**Beobachtung:** (Struktur der Lösung)

- Homogene lineare DGL  $n$ -ter Ordnung hatte genau  $n$  linear unabhängige Fundamentallösungen.
- Inhomogene lineare DGL  $n$ -ter Ordnung hatte allgemeine Lösung der Form

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

mit  $y_h(x)$  Linearkombination der Fundamentallösungen und  $y_p(x)$  irgendeine Lösung der inhomogenen DGL.

- Bislang betrachtet:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = g(x),$$

wobei  $a_n(x) = 1$  angenommen wurde. Ist  $a_n(x) \neq 1$ , aber  $a_n(x) \neq 0$  für alle  $x \in D$ , so kann man o.B.d.A. durch  $a_n(x)$  teilen und erhält die bisherige Struktur.

- Falls  $a_n(x) = 0$ , so ändert sich die Ordnung der DGL und damit auch die Struktur (man verliert eine Fundamentallösung).

**Beobachtung:** (Struktur der Gleichung)

Betrachte die DGL erster Ordnung

$$y' + xy = x$$

- Lösung der homogenen DGL (Trennung der Variablen):  $y_h(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}}$ .
- Partikuläre Lösung (Variation der Konstanten):  $y_p(x) = 1$ .
- Allgemeine Lösung:  $y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$ .

**Beobachtung:** (Struktur der Gleichung)

Wenn

$$y' + xy = x$$

gilt, dann auch wenn sie differenziert wird, also

$$y'' + y + xy' = 1.$$

Und  $y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$  ist auch Lösung dieser DGL 2. Ordnung.

3

**Warnung:** (Struktur der Gleichung)

Bei der Umformung von mathematischen Modellen  
(beispielsweise bei DGLn durch differenzieren)  
muss die Lösungsmenge gleich bleiben!

### Erinnerung

**Definition:** Ein lineares Differenzialgleichungssystem (LDS) 1. Ordnung ist ein System von  $n$  linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung in  $n$  Variablen  $y_1, \dots, y_n$  mit konstanten Koeffizienten  $a_{ij}$  und  $b_i$ :

$$y' = Ay + b$$

mit  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  und  $b = (b_i)_{i=1}^n$ .

**Homogenes System:**  $y' = Ay$

**Partikulärlösung:**  $y_p$  ist eine Lösung des inhomogenen Systems  $y' = Ay + b$ .

**Allgemeine Lösung:**  $y = y_h + y_p$ , wobei  $y_h$  die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist.

**Matrixexponentialfunktion:**  $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$

**Fundamentalsystem:**  $\{y_1, \dots, y_n\}$  ist ein Fundamentalsystem, wenn die Matrix  $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$  invertierbar ist.

**Wronskian:**  $W(y_1, \dots, y_n)(t) = \det(Y(t))$

**Abelsche Identität:**  $W'(t) = -\text{tr}(A)W(t)$

**Liouville'sche Formel:**  $W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds\right)$

**Stabilität:** Ein System  $y' = Ay$  ist stabil, wenn  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  für alle Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $A$  gilt.

Differentialgleichungen I



Wolfram-Lösungswegweiser für Mathematik 2020

### Allgemeine Warnung

**Warnung (Struktur der Gleichung)**  
Bei der Umformung von mathematischen Modellen (Bsp. in den Vorlesungen) ist die Struktur der Gleichung zu beachten. Insbesondere bei DGLs durch Differenzieren muss die Lösungsmenge gleich bleiben!

**Beispiel:**  $y' = y^2$  vs.  $y' = y^2 + 1$

**Warnung:** Die Umformung von  $y' = y^2$  zu  $y' = y^2 + 1$  durch Differenzieren ist nicht zulässig, da die Lösungsmenge nicht gleich bleibt.

### DGLn mit einfachen Inhomogenitäten

**Beispiel:**  $y' + y = \cos(x)$

**Ansatz:**  $y_p = A \cos(x) + B \sin(x)$

**Ergebnis:**  $y_p = \cos(x)$

**Allgemeine Lösung:**  $y = e^{-x} C + \cos(x)$

**Warnung:** Bei der Umformung von  $y' + y = \cos(x)$  zu  $y' + y = \sin(x)$  durch Differenzieren ist die Lösungsmenge nicht gleich.