Differentialgleichungen I

Woche 06 / J. Behrens

TUHH Technische Universität Hamburg

BITTE BEACHTEN SIE DIE 3G-REGEL!

PLEASE OBEY THE 3G RULE!

Zutritt zur Lehrveranstaltung haben nur:

–VOLLSTÄNDIG GEIMPFTE
–GENESENE
–GETESTETE
(negatives Testergebnis ist max. 24 Std. gültig)

Sollten Sie dies nicht nachweisen können, müssen Sie bitte den Raum jetzt verlassen.
Andernfalls droht ein Hausverbot!

Vielen Dank für Ihr Verständnis.
Schützen Sie sich und andere!

Admission to the course is restricted to persons who are:

–FULLY VACCINATED
–RECOVERED
–TESTED
(negative test result is valid for max. 24 hours)

If you cannot prove this, please leave the room now.
Otherwise you could be banned from the room!

Thank you for your understanding.
Protect yourself and others!

(1)

- Betrachte homogene DGL n-ter Ordnung.
- Ansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

- Es gilt: $y^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k} e^{\lambda x} = \lambda^k e^{\lambda x}$ und $y = e^{\lambda x} \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$.
- Daher ist $y = e^{\lambda x}$ genau dann Lösung ($g = 0$), wenn λ Nullstelle ist von

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Lösungsansatz:
Untersuchung des Nullstellenverhaltens von $P(\lambda)$ ergibt folgende Fälle:

1. $P(\lambda)$ besitzt n verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
2. $P(\lambda)$ besitzt eine komplexe Nullstelle λ_k.
3. $P(\lambda)$ besitzt eine (reelle oder komplexe) r-fache Nullstelle λ_1 $(r \geq 2)$.

Nullstellenverhalten von $P(\lambda)$:

Fall 1: $P(\lambda)$ besitzt n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Die homogene DGL $L[y]=0$ hat n Lösungen

$$e^{\lambda_1 x} \dots e^{\lambda_n x}$$

Fall 2: $P(\lambda)$ besitzt eine Nullstelle $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

- $e^{\lambda x}$ ist sinnvoll für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ $\lambda \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ $e^{\lambda_k x}$ löst die homogene DGL für $\lambda_k \in \mathbb{C}$

- Falls $a_i \in \mathbb{R}$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ so gibt es für $e^{\lambda_k x}$ komplex zwei reellwertige Lösungen

- Seien $y_1(x)$, $y_2(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ reellwertige Funktionen und

$$y(x) = y_1(x) + i\, y_2(x) \qquad \text{komplexwertig}$$

$$\Rightarrow y'(x) = y_1'(x) + i\, y_2'(x) \quad \text{bzw.} \quad y^{(l)}(x) = y_1^{(l)}(x) + i\, y_2^{(l)}(x)$$

$l \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots a_0 y(x)$$

$$= \underbrace{\left[y_1^{(n)}(x) + a_{n-1} y_1^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y_1(x)\right]}_{=0} + i \underbrace{\left[y_2^{(n)}(x) + a_{n-1} y_2^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y_2(x)\right]}_{=0} = 0$$

- Also Re und Im müssen verschwinden

- $y(x)$ ist Lösung von $L[y]=0$
  $\Leftrightarrow$ $y_1 = \operatorname{Re} y$ und $y_2 = \operatorname{Im}(y)$ sind Lösungen

- Verwende Eulersche Formel : $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$, $\phi \in \mathbb{R}$

  Additionstheorem : $e^{(a+ib)} = e^a e^{ib}$, $a, b \in \mathbb{R}$

  schreibe $\lambda_k = \sigma_k + i\tau_k$

$\Rightarrow y_k(x) = e^{\lambda_k x} = e^{\sigma_k x}(\cos\tau_k x + i\sin\tau_k x)$

$\Rightarrow$ erhalte die beiden Lösungen

$$e^{\sigma_k x}\cos\tau_k x \quad \text{und} \quad e^{\sigma_k x}\sin\tau_k x$$

- Da mit $\lambda_k \in \mathbb{C}$ auch $\overline{\lambda_k}$ Nullstelle von $P(\lambda)$ ist,

$\Rightarrow$ $e^{\sigma_k x}\cos(-\tau_k x) = e^{\sigma_k x}\cos(\tau_k x)$

$e^{\sigma_k x}\sin(-\tau_k x) = -e^{\sigma_k x}\sin(\tau_k x)$

sind bis auf Vorzeichen dieselben Lösungen.

Fall 3: $P(\lambda)$ besitzt r-fache Nullstelle λ_1 ($r \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Dann ist $e^{\lambda_1 x}$ Lösung von $L[y] = 0$.

- Satz von Schwarz und Stetigkeit von $f(\lambda, x) = e^{\lambda x}$ erlaubt :

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} P(\lambda) = e^{\lambda x}(\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1}) \cdot \dots (\lambda - \lambda_n)$$
$$= e^{\lambda x}(\lambda - \lambda_1)^r \cdot Q(\lambda)$$

- Differentiation :

$$L[x e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}[x(\lambda - \lambda_1)^r Q(\lambda) + r(\lambda - \lambda_1)^{r-1} Q(\lambda) + (\lambda - \lambda_1)^r Q'(\lambda)]$$

- Da $r \geq 2$ verschwindet die rechte Seite für $\lambda = \lambda_1$, d.h.

  $y = x e^{\lambda_1 x}$ ist Lösung von $L[y] = 0$.

- Wiederhole diesen Schritt $(\nu-1)$-mal:

$$e^{\lambda_1 x}, \; x e^{\lambda_1 x}, \; x^2 e^{\lambda_1 x} \; \dots \; x^{\nu-1} e^{\lambda_1 x}$$

sind Lösungen der homogenen DGL.

② Beispiel:

- Betrachte $y'' - 4y = 0$
- Charakt. Polynom: $\lambda^2 - 4 = P(\lambda)$
- Nullstellen: $\lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = -2$
- Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^{2x}, \; y_2(x) = e^{-2x}$
- Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

Charakt. Polynom:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} \dots a_0 y = 0$$

Ansatz $e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_0$$

$$y'' - 4y = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 4$$

3

Vorbemerkungen:

- Betrachte beispielhaft

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x).$$

- Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ lin. unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung (d.h. $g(x) = 0$).

- Also gilt

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

- Die Lösungen der homogenen Gleichung lauten dann

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

3

Inhomogene DGL – Ansatz Variation der Konstanten

- $y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$

- $y'(x) = C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x) + C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x)$

- Annahme: C_1 und C_2 erfüllen $\circledast$ $C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0$

$$y'(x) = C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x)$$

- $y''(x) = C_1(x)\, y_1''(x) + C_2(x)\, y_2''(x) + C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x)$

- Einsetzen in $y'' + ay' + by = g$

$$C_1(x)\, y_1''(x) + C_2(x)\, y_2''(x) + C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) +$$
$$+ a(x)\left[C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x)\right] + b(x)\left[C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)\right] = g(x)$$

$$\Rightarrow C_1(x)\underbrace{\left[y_1''(x) + a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)\right]}_{=0} + C_2(x)\underbrace{\left[y_2''(x) + a(x)\, y_2'(x) + b(x)y_2(x)\right]}_{=0}$$
$$+ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) \quad = g(x)$$

$$\Rightarrow \quad C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = g(x) \quad (**)$$

- Aus (*) und (**) folgt:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}$$

- Da y_1 und y_2 bilden Fundamentalsystem

$$\Rightarrow \quad W(x) = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) \neq 0$$

- Löse mit Cramerschen Regel

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)\, g(x)}{W(x)} \quad , \quad C_2'(x) = \frac{y_1(x)\, g(x)}{W(x)}$$

- Integration:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)\, g(x)}{W(x)}\, dx + C_3$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x)\, g(x)}{W(x)}\, dx + C_4$$

- Lösung $\quad y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$