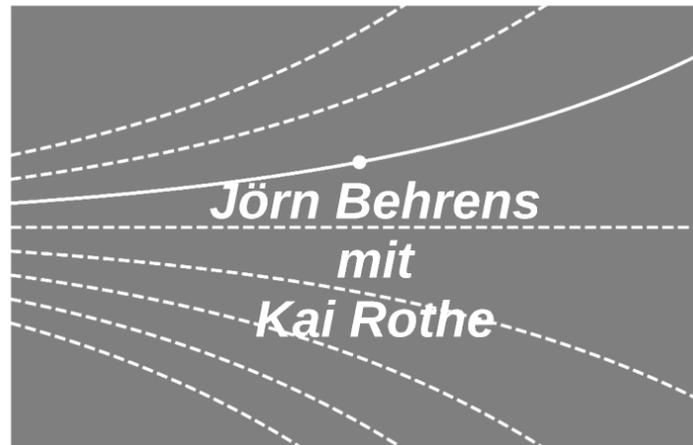


# Differentialgleichungen I



Lineare DGL Systeme – Matrix-Exponentiallösung

Lineare DGL n-ter Ordnung

Buch Kapitel 6.7-6.8

# Erinnerung: Lineares DGL-System 1. Ordnung

**Satz: (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)**  
Die Elemente  $a_{ij}(x)$  der Matrix  $A(x)$  und die Komponenten von  $g$  seien stetig im Intervall  $[a, b]$ . Sei weiter  $x_0 \in [a, b]$  und  $y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^T$  beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = A(x)y + g, \quad y(x_0) = y_0,$$

genau eine Lösung auf ganz  $[a, b]$ .

**Satz: (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)**  
Sind die Elemente  $a_{ij}(x)$  der Matrix  $A(x)$  stetig im Intervall  $[a, b]$ , dann besitzt das inhomogene System

$$y' = A(x)y$$

auf  $[a, b]$  genau  $n$  linear unabhängige Lösungen.

**Definition: (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)**  
Unter einem linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung versteht man eine Gleichung

$$y'(x) = A(x)y(x) + g, \quad A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die  $a_{ij}(x)$  Funktionen sind, und  $y$  und  $g$  Spaltenvektoren von  $n$  Komponenten, die von  $x$  abhängen.

Ist  $g = 0$ , so heißt das Differentialgleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

**Satz: (Wronski-Test)**  
Seien  $y_1, \dots, y_n$  Lösungen des Systems  $y' = A(x)y$  auf  $[a, b]$ . Falls  $w(x)$  stetig in  $[a, b]$ , dann gilt

- $W(x) \equiv 0$  oder  $W(x) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ .
- Die Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  bilden ein Fundamentalsystem auf  $[a, b]$  genau dann, wenn  $W(x) \neq 0$ .

**Satz: (Hauptvektorklösungen)** Sei  $\lambda$  ein Eigenwert der  $n \times n$ -Matrix  $A$  mit der algebraischen Vielfachheit  $\sigma$  und  $v_1, \dots, v_\sigma$  linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^{\sigma} v = 0.$$

Dann sind

$$y_k = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j v_k \quad (k = 1, \dots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Systems erster Ordnung  $y' = Ay$ .

**Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)**  
Sei  $A = (a_{ij})$  eine konstante  $n \times n$ -Matrix mit  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  ein Eigenwert (EW) von  $A$  mit zugehörigem Eigenvektor (EV)  $v$ .  
Dann ist

$$y = e^{\lambda x} v$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung  $y' = Ay$ .

Hat die Matrix  $A$  die  $n$  voneinander verschiedenen EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit zugehörigen EV  $v_1, \dots, v_n$ , dann bilden die Lösungen

$$y_i = e^{\lambda_i x} v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$y = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} v_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

**Definition:** (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)

Unter einem **linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung** versteht man eine Gleichung

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die  $a_{ij}(x)$  Funktionen sind, und  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{g}$  Spaltenvektoren von  $n$  Komponenten, die von  $x$  abhängen.

Ist  $\mathbf{g} \equiv 0$ , so heißt das Differentialgleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

**Bemerkungen:**

- Differentialgleichungen  $k$ -ter Ordnung lassen sich zu Systemen von  $k$  Gleichungen 1. Ordnung reduzieren!  
Idee:  $x_1 = y$ ,  $x_2 = y'$ ,  $x_3 = y''$ , etc.
- Ist  $n = 1$ , so handelt es sich um eine lineare DGL.

**Satz:** (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Die Elemente  $a_{ij}(x)$  der Matrix  $A(x)$  und die Komponenten von  $\mathbf{g}$  seien stetig im Intervall  $]a, b[$ . Sei weiter  $x_0 \in ]a, b[$  und  $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^\top$  beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz  $]a, b[$ .

**Satz:** (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Sind die Elemente  $a_{ij}(x)$  der Matrix  $A(x)$  stetig im Intervall  $]a, b[$ , dann besitzt das inhomogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf  $]a, b[$  genau  $n$  linear unabhängige Lösungen.

**Satz:** (Wronski-Test)

Seien  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  Lösungen des Systems  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$  auf  $]a, b[$ .

Falls  $a_{ij}(x)$  stetig in  $]a, b[$ , dann gilt

1.  $W(x) \equiv 0$  oder  $W(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ .
2. Die Lösungen  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  bilden ein Fundamentalsystem auf  $]a, b[$  genau dann, wenn  $W(x) \neq 0$ .

**Satz:** (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)

Sei  $A = (a_{ij})$  eine konstante  $n \times n$ -Matrix mit  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  ein Eigenwert (EW) von  $A$  mit zugehörigem Eigenvektor (EV)  $\mathbf{v}$ .

Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x} \mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ .

Hat die Matrix  $A$  die  $n$  voneinander verschiedenen EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit zugehörigen EV  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ , dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

**Satz:** (Hauptvektorklösungen) Sei  $\lambda$  ein Eigenwert der  $n \times n$ -Matrix  $A$  mit der algebraischen Vielfachheit  $\sigma$  und  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\sigma$  linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^\sigma \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Dann sind

$$\mathbf{y}_k = e^{\lambda k} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \mathbf{v}_k \quad (k = 1, \dots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Systems erster Ordnung  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ .

## Matrix-Exponentiallösung

**Vorbemerkung:** (Exponential-Lösung)

- Für lineare DGL  $y' = ay$  gibt es die Lösung  $y(x) = e^{ax}y(0)$ .
- **Ziel:** Übertragung dieses Ergebnisses auf System

$$y' = Ay.$$

- Verwende dazu die **Matrix-Exponentialfunktion**

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

- $e^B$  ist eine  $(n \times n)$ -Matrix, wenn  $B$  eine solche ist.
- Die Reihe konvergiert!

1

**Zusammenfassend:** (Matrix-Exponentiallösung)

Die Abbildung  $y(x) = e^{xA}y(0)$  ist Lösung des DGL-Systems

$$y' = Ay.$$

Dabei ist

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

2

**Vorbemerkung:** (Exponential-Lösung)

- Für lineare DGL  $y' = ay$  gibt es die Lösung  $y(x) = e^{ax}y(0)$ .
- **Ziel:** Übertragung dieses Ergebnisses auf System

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

- Verwende dazu die **Matrix-Exponentialfunktion**

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

- $e^B$  ist eine  $(n \times n)$ -Matrix, wenn  $B$  eine solche ist.
- Die Reihe konvergiert!



**Zusammenfassend:** (Matrix-Exponentiallösung)

Die Abbildung  $\mathbf{y}(x) = e^{xA}\mathbf{y}(0)$  ist Lösung des DGL-Systems

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Dabei ist

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$



# Inhomogene DGL-Systeme 1. Ordnung

Vorbemerkung: Lösung erfolgt in zwei Schritten:  
1. Lösung des homogenen Systems  
2. Bestimmung einer speziellen (partikulären) Lösung

## Satz (Lösungsstruktur des inhomogenen Systems)

Es seien gegeben:

- Inhomogenes lineares System:  $y' = A(x)y + g$
- Homogenes lineares System:  $y' = A(x)y$
- Fundamentalsystem des homogenen Systems:  $y_1, \dots, y_n$
- Lösung des homogenen Systems:  $y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$
- Irreguläre Lösung des inhomogenen Systems:  $y_p$

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen Systems die Form

$$y = y_h + c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_p + y_h$$

mit Konstanten  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ .

## Satz: (Variation der Konstanten bei Systemen)

Es seien gegeben:

- $y_1, \dots, y_n$  Fundamentalsystem auf  $[a, b]$ ,
- Die Matrix  $Y(x) = [y_1 \dots y_n]$ ,
- Inhomogenes System  $y' = A(x)y + g$  mit  $g$  komponentenweise stetig.

Dann ist

$$y_p = Y(x) \cdot c(x)$$

partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei  $c(x) = \int c'(x) dx$   
und  $c'(x) = (c'_1(x), \dots, c'_n(x))^T$  Lösung des Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot c'(x) = g.$$

3

**Vorbemerkung:** Lösung erfolgt in zwei Schritten:

1. Lösung des homogenen Systems
2. Bestimmung einer speziellen (partikulären) Lösung

**Satz:** (Lösungsstruktur des inhomogenen Systems)

Es seien gegeben:

- Inhomogenes lineares System:  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$
- Homogenes lineares System:  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$
- Fundamentalsystem des homogenen Systems:  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$
- Lösung des homogenen Systems:  $\mathbf{y}_h = c_1\mathbf{y}_1 + \dots + c_n\mathbf{y}_n$
- Irgendeine Lösung des inhomogenen Systems:  $\mathbf{y}_p$

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen System die Form

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + \dots + c_n\mathbf{y}_n = \mathbf{y}_p + \mathbf{y}_h$$

mit Konstanten  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}|\mathbb{C}$ .

**Satz:** (Variation der Konstanten bei Systemen)

Es seien gegeben:

- $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  Fundamentalsystem auf  $]a, b[$ ,
- Die Matrix  $Y(x) = [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n]$ ,
- Inhomogenes System  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}$  mit  $g$  komponentenweise stetig.

Dann ist

$$\mathbf{y}_p = Y(x) \cdot \mathbf{c}(x)$$

partikuläre Lösung des inhomogenen Systems, wobei  $\mathbf{c}(x) = \int \mathbf{c}'(x) dx$   
und  $\mathbf{c}'(x) = (c'_1(x), \dots, c'_n(x))^T$  Lösung des Gleichungssystems

$$Y(x) \cdot \mathbf{c}'(x) = \mathbf{g}.$$



# Lineare DGL n-ter Ordnung

**Definition:** (Lineare DGL n-ter Ordnung)  
Eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung ist gegeben durch

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x),$$

mit  $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x), g(x)$  definiert auf  $]a, b[$ .

**Satz:** (Existenz einer linearen DGL n-ter Ordnung)  
Seien Funktionen  $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$  beliebig auf  $]a, b[$ .

1. Dann gibt es in  $a$  auf  $]a, b[$  definierte Fundamentalsystem  $y_1, \dots, y_n$ , von  $y_1^{(k)} + a_{k-1}(x)y_1^{(k-1)} + \dots + a_0(x)y_1 = 0$  und jede Lösung  $y(x)$  dieser homogenen DGL besitzt die Form  $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$  mit gewissen Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .
2. In  $a$  liegen die homogenen DGL außer genau dann ein Fundamentalsystem, wenn  $W(y_1, \dots, y_n)(a) \neq 0$  ist.
3. Sei  $y_p(x)$  für  $x \in ]a, b[$  eine partikuläre Lösung von  $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x)$ .  
Ist  $y_1, \dots, y_n$  Fundamentalsystem der homogenen DGL, so sind auch  $y_1, \dots, y_n, y_p$  ein Fundamentalsystem der inhomogenen DGL, falls  $W(y_1, \dots, y_n, y_p)(a) \neq 0$  ist.
4. Ist  $W(y_1, \dots, y_n, y_p)(a) = 0$ , so gibt es genau eine Lösung  $y(x)$  der inhomogenen DGL, welche die Anfangsbedingungen  $y(a) = y_1(a), y'(a) = y_1'(a), \dots, y^{(n-1)}(a) = y_1^{(n-1)}(a)$  erfüllt. Die Lösung existiert in ganzem Intervall  $]a, b[$ .

**Definition:** (Wronski-Determinante von n Lösungen einer linearen DGL n-ter Ordnung)  
Seien  $y_1, \dots, y_n$  auf  $]a, b[$  beliebige Lösungen der homogenen DGL n-ter Ordnung. Dann heißt

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

die **Wronski-Determinante** dieser n Lösungen.

**Bemerkung:** Man kann beweisen:  
 $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$  für  $x \in ]a, b[$   $\Leftrightarrow W(y_1, \dots, y_n)(a) \neq 0$ .

**Bemerkung:** (Lineare DGL n-ter Ordnung – System erster Ordnung)  
Führe die Funktionen

$$y_1 := y, y_2 := y', \dots, y_n := y^{(n-1)}$$

ein und erhalte folgendes System erster Ordnung mit n Gleichungen:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_{n-1}(x)y_n - a_{n-2}(x)y_{n-1} - \dots - a_0(x)y_1 + g(x). \end{cases}$$

**Bemerkung:** (Lösbarkeit)  
Betrachte den homogenen Fall:  $g(x) = 0$ . Dann ist  $y(x)$  Lösung der linearen DGL n-ter Ordnung, wenn

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Lösung des homogenen Systems  $y' = A(x)y$  ist. Falls Anfangsbedingungen

$$y(a) = y_0, y'(a) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(a) = y_{0,n-1}$$

für die Gleichung n-ter Ordnung gegeben sind, so ergeben

$$y(a) = (y_0, y_0', \dots, y_{0,n-1})^T$$

die Anfangsbedingungen des Systems.

**Definition:** (Fundamentalsystem einer linearen DGL) Seien

- $y_1, \dots, y_n$  auf  $]a, b[$  definierte Lösungen der homogenen DGL n-ter Ordnung,
- $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  Koeffizienten, und
- es gelte: falls für alle  $x \in ]a, b[$  für die  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$

gilt, folgt  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Dann heißt  $y_1, \dots, y_n$  **Fundamentalsystem** der homogenen DGL n-ter Ordnung.

**Definition:** (Lineare DGL  $n$ -ter Ordnung)

Eine **linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung** ist gegeben durch

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x),$$

mit  $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x), g(x)$  definiert auf  $]a, b[$ .

**Bemerkung:** (Lineare DGL  $n$ -ter Ordnung – System erster Ordnung)  
Führe die Funktionen

$$y_1 := y, y_2 := y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$$

ein und erhalte folgendes System erster Ordnung mit  $n$  Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0(x)y_1 - a_1(x)y_2 - \dots - a_{n-1}(x)y_n + g(x). \end{aligned}$$



**Bemerkung:** Mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

entspricht die lineare DGL  $n$ -ter Ordnung also dem System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}(x).$$

**Bemerkung:** (Lösbarkeit)

Betrachte den homogenen Fall:  $g(x) = 0$ . Dann ist  $y(x)$  Lösung der linearen DGL  $n$ -ter Ordnung, wenn

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Lösung des homogenen Systems  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$  ist. Falls Anfangsbedingungen

$$y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

für die Gleichung  $n$ -ter Ordnung gegeben sind, so ergeben

$$\mathbf{y}(\xi) = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})^\top$$

die Anfangsbedingungen des Systems.

**Definition:** (Fundamentalsystem einer linearen DGL) Seien

- $y_1, \dots, y_n$  auf  $]a, b[$  definierte Lösungen der homogenen DGL  $n$ -ter Ordnung,
- $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  Koeffizienten, und
- es gelte: falls für alle  $x \in ]a, b[$  für die

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

gilt, folgt  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

Dann heißt  $y_1, \dots, y_n$  **Fundamentalsystem** der homogenen DGL  $n$ -ter Ordnung.

Bemerkung: Differentialgleichung (1)  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  mit  $p, q \in C^1(I)$  und  $I = ]a, b[$  ist ein lineares Gleichungssystem  
$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p(x)y_1 - q(x)y_2 \\ -p(x)y_2 - q(x)y_3 \\ \vdots \\ -p(x)y_{n-1} - q(x)y_n \end{pmatrix}$$
  
Dieses Gleichungssystem besitzt genau dann nur die triviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet.

**Bemerkung:** Differentiation (für  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ) der Gleichung

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & & y'_n \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt genau dann nur die triviale Lösung, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet.

**Definition:** (Wronski-Determinante von  $n$  Lösungen einer linearen DGL  $n$ -ter Ordnung)

Seien  $y_1, \dots, y_n$  auf  $]a, b[$  beliebige Lösungen der homogenen DGL  $n$ -ter Ordnung. Dann heißt

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

die **Wronski-Determinante** dieser  $n$  Lösungen.

**Bemerkung:** Man kann beweisen:

$$W(x) \neq 0 \quad \forall x \in ]a, b[ \quad \Leftrightarrow \quad \exists x_0 \in ]a, b[: \quad W(x_0) \neq 0.$$

**Satz:** (Lösbarkeit einer linearen DGL  $n$ -ter Ordnung)

Seien Funktionen  $a_i(x)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  und  $g(x)$  stetig auf  $]a, b[$ .

1. Dann gibt es ein auf  $]a, b[$  definiertes Fundamentalsystem  $y_1, \dots, y_n$  von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$$

und jede Lösung  $y_h(x)$  dieser homogenen DGL besitzt die Form

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

mit geeigneten Koeffizienten  $c_1, \dots, c_n$ .

2. Je  $n$  Lösungen der homogenen DGL bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn  $W(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ .
3. Sei  $y_p(x)$  für  $x \in ]a, b[$  eine partikuläre Lösung von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x)$$

Ist  $y_1, \dots, y_n$  Fundamentalsystem der homogenen DGL, so sind durch

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad c_i \in \mathbb{R}$$

alle Lösungen der linearen inhomogenen DGL  $n$ -ter Ordnung erfasst.

4. Ist  $\xi \in ]a, b[$  und  $\eta_0, \dots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$ , so gibt es genau eine Lösung  $y(x)$  der inhomogenen DGL, welche die Anfangsbedingungen

$$y(\xi) = \eta_0, \quad y'(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

erfüllt. Die Lösung existiert im gesamten Intervall  $]a, b[$ .

## Lineare DGL n-ter Ordnung

**Definition:** Gegeben  $n$  lineare DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

**Charakteristisches Polynom:**

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

**Wurzeln:**  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

**Homogenes System:**  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$

**Partikulärlösung:**  $y_p(x)$

**Allgemeine Lösung:**  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

**Beispiel:**  $y'' + 3y' + 2y = 0$

$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$

Wurzeln:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

Homogenes System:  $y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

Partikulärlösung:  $y_p(x) = 0$

Allgemeine Lösung:  $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

## Erinnerung: Lineares DGL-System 1. Ordnung

**Definition:** Gegeben  $n$  lineares DGL-System 1. Ordnung

$$y' = A(x)y + b(x)$$

**Charakteristisches Polynom:**

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

**Wurzeln:**  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

**Homogenes System:**  $y' = A(x)y$

**Partikulärlösung:**  $y_p(x)$

**Allgemeine Lösung:**  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

**Beispiel:**  $y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

Wurzeln:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

Homogenes System:  $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Partikulärlösung:  $y_p(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung:  $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

## Differentialgleichungen I



Lineare DGL, Separation, Bernoulli & Riccati DGL, Exakte DGL, Bernoulli DGL

## Inhomogene DGL-Systeme 1. Ordnung

**Definition:** Gegeben  $n$  inhomogenes DGL-System 1. Ordnung

$$y' = A(x)y + b(x)$$

**Charakteristisches Polynom:**

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

**Wurzeln:**  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

**Homogenes System:**  $y' = A(x)y$

**Partikulärlösung:**  $y_p(x)$

**Allgemeine Lösung:**  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

**Beispiel:**  $y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$

Wurzeln:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

Homogenes System:  $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Partikulärlösung:  $y_p(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung:  $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

## Matrix-Exponentiallösung

- Voraussetzung:** (Exakt 1. Ordnung)
- $A(x)$  ist  $n \times n$  Matrix in der Lösung  $y(x) = e^{A(x)} y_0$
  - $b(x)$  ist  $n \times 1$  Vektor in der Lösung  $y(x) = e^{A(x)} y_0 + \int e^{A(x)} b(x) dx$
  - $A(x)$  ist  $n \times n$  Matrix, wenn  $b(x)$  ein Vektor ist
  - Die Matrix  $A(x)$  ist

**Zusammenfassung (Matrix-Exponentiallösung)**

Die Lösung  $y(x) = e^{A(x)} y_0 + \int e^{A(x)} b(x) dx$

Dabei ist  $y_0 = y(x_0)$

$$e^{A(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(x)^k}{k!}$$