Differentialgleichungen I

Woche 04 / J. Behrens

TUHH Technische Universität Hamburg

BITTE BEACHTEN SIE DIE 3G-REGEL!
PLEASE OBEY THE 3G RULE!

Zutritt zur Lehrveranstaltung haben nur:

- VOLLSTÄNDIG GEIMPFTE
- GENESENE
- GETESTETE

(negatives Testergebnis ist max. 24 Std. gültig)

Sollten Sie dies nicht nachweisen können, müssen Sie bitte den Raum jetzt verlassen. Andernfalls droht ein Hausverbot!

Vielen Dank für Ihr Verständnis. Schützen Sie sich und andere!

Admission to the course is restricted to persons who are:

- FULLY VACCINATED
- RECOVERED
- TESTED

(negative test result is valid for max. 24 hours)

If you cannot prove this, please leave the room now. Otherwise you could be banned from the room!

Thank you for your understanding. Protect yourself and others!

(1)

Satz: (Gesamtheit der Lösungen)
Durch $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ sei auf $]a,b[$ ein Fundamentalsystem von

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

gegeben. Dann lässt sich jede Lösung $\mathbf{y}$ auf $]a,b[$ schreiben in der Form

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i, \quad \text{konst.} \equiv c_i \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

$\mathbf{y}$ in der obigen Form heißt auch allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

Bemerkung: Die Linearkombinationen sind Lösungen von $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$, denn mit $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i$ gilt:

$$\mathbf{y}' = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i' = \sum_{i=1}^{n} c_i A(x)\mathbf{y}_i = A(x) \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{y}_i = A(x)\mathbf{y}.$$

Beobachtung: a) Lösungen des lin. DGL-Systems $\vec{y}' = A(x)\vec{y}$ bilden einen Vektorraum bzgl. des Zahlkörpers der c_i

$$y = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad ; \quad y_i \text{ bilden Fundamentalsyst.}$$

b) Da die y_n lin. unabhängige Lösungen sind

$\Rightarrow$ Vektorraum der Dimension n

Spezialfall: $n = 1$ d.h. nur eine einzige DGL: $y' = p(x)\,y$

$\Rightarrow$ Lösung $y = C y_1 = C e^{-P(x)}$ ist allg. Lösung des „homog. Systems"

Vektorraum hat Dim $= 1$

Frage: Wie finden wir ein Fundamentalsystem?

Lösbar, falls $A(x)$ nur konstante Elemente enthält.

Sonst findet man Lösungen in Spezialfällen, oder zufällig oder numerisch

Ziel: Finde Lösungen für $A(x)$ mit $a_{ij} = $ konstant.

Dazu: Sei $\vec{v}$ Eigenvektor (EV) zum Eigenwert (EW) λ

$$\Rightarrow \quad y' = \lambda e^{\lambda x} v = \lambda \vec{y} = A\vec{y}$$

Also lässt sich mit EW λ und EV $\vec{v}$ eine Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$ konstruieren.

<u>Beispiel:</u> $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, d.h. $A \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Für A findet man EWe $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ mit EVen $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Mit der Idee von oben:

$$\vec{y}_1 = e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1 \quad , \quad \vec{y}_2 = e^{\lambda_2 x} \vec{v}_2$$

<u>Zeige</u>: $[\vec{y}_1, \vec{y}_2]$ ist Fundamentalsystem $\rightsquigarrow$ Wronski-Test

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & -e^{3x} \end{pmatrix} = -e^x e^{3x} - e^x e^{3x} = 2e^{4x} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ bilden Fundamentalsystem.

$\Rightarrow$ $\vec{y} = c_1 \vec{y}_1 + c_2 \vec{y}_2 = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ist die allgem. Lösung.

(2) **Satz**: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)
Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$-Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) $\mathbf{v}$.
Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x}\mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x}\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i x}\mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Bemerkungen: (Anwendung der Linearen Algebra)

- Matrizen haben nicht immer paarweise verschiedene EWe, Vielfachheit > 1 möglich. Daher: Fundamentalsystem nur konstruierbar, wenn jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

- Falls die zum EW λ_k gehörige algebraische Vielfachheit $\sigma_k < n$ mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt, so gibt es σ_k linear unabhängige zugehörige EV $\mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}$, und damit σ_k linear unabhängige Lösungen

$$\mathbf{y}_{k_1} = e^{\lambda_k x}\mathbf{v}_{k_1}, \ \ldots, \ y_{k_{\sigma_k}} = e^{\lambda_k x}\mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}.$$

- In diesem Fall lassen sich also zu m verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit Vielfachheiten $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ n linear unabhängige Lösungen (Fundamentalsystem)

$$\mathbf{y}_{k_1} = e^{\lambda_k x}\mathbf{v}_{k_1}, \ \ldots, \ \mathbf{y}_{k_{\sigma_k}} = e^{\lambda_k x}\mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}, \quad (k = 1, \ldots, m),$$

konstruieren, denn $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k = n$.

2

__Beispiel:__ Betrachte

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 - 8y_2 - 12y_3 \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 + 4y_3 \\ y_3' &= y_3 \end{aligned}\right\} (*)$$

Vereinbare: $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dann: (*) lässt sich schreiben $\vec{y}' = A\vec{y}$

Eigenwerte: Charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)\lambda$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2$

Eigenvektoren: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lin. unabh.

EV-Matrix: $B = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3]$ ist regulär und es gilt

$AB = BD$ wobei $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, denn $A\vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$

$\Rightarrow B^{-1}AB = D$

Hilfsvektor: Führe $\vec{z}$ ein: $\vec{y} = B\vec{z}$

$\Rightarrow \vec{y}' = AB\vec{z} \Rightarrow B^{-1}\vec{y}' = \vec{z}' = B^{-1}AB\vec{z}$

$\Rightarrow \vec{z}' = D\vec{z}$ oder $\left.\begin{aligned} z_1' &= 0 \\ z_2' &= z_2 \\ z_3' &= 2z_3 \end{aligned}\right\}$ entkoppeltes DGL-System

$\Rightarrow$ Lösungen: $z_1 = C_1$, $z_2 = c_2 e^x$, $z_3 = c_3 e^{2x}$

Rücksubstitution: Es gilt $\vec{y} = B\vec{z}$

$$\vec{y} = B\vec{z} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^x \\ c_3 e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 4 + c_2 4 e^x + c_3 2 e^{2x} \\ -c_1 - c_3 e^{2x} \\ -c_2 e^x \end{pmatrix}}_{\text{allgem. Lösung.}} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

<u>Frage</u>: Was, wenn algebraische und die geometrische Vielfachheit verschieden?

<u>Betrachte</u>: $\vec{y}' = A\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \vec{y}$ (**)

<u>Finde</u>: $\lambda = 3$ doppelter Eigenwert von A

Zu λ existieren EV der Form $\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} = \vec{v}$ also

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ lin. abhängig

<u>Lösung</u>: $\vec{y}_1 = e^{\lambda x} v_1 = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist eine Lösung

<u>Fundamentalsystem</u>: Benötige weitere lin. unabh. Lösung.

Existiert nicht in der Form $e^{\lambda x}\vec{v}$

Suche also etwas allgemeinere Form

$\vec{y}_2 = x e^{3x} \vec{w}$ $(\cdot)$ mit $\vec{w}$ konstant

Einsetzen in (*7) :

$$\Rightarrow \underbrace{3x e^{3x} \vec{\omega} + e^{3x} \vec{\omega}}_{\vec{y}\,'} - \underbrace{A x e^{3x} \omega}_{A\vec{y}}$$

$$= x e^{3x} (3\vec{\omega} - A\vec{\omega}) + e^{3x}\vec{\omega} \overset{!}{=} 0$$

gilt nur falls $\vec{\omega} = 0$

Weiteres Ansatz: $\vec{y}_2 = e^{3x}\vec{v} + x e^{3x}\vec{\omega}$ (••)

Einsetzen: $3x e^{3x} \omega + e^{3x}(\vec{\omega} + 3\vec{v}) = A(x e^{3x}\vec{\omega} + e^{3x}\vec{v})$

$$\Rightarrow 0 = x e^{3x} (A - 3E)\vec{\omega} + e^{3x}[(A-3E)\vec{v} + \vec{\omega}]$$

Koeffizientenvergleich:

$$\Rightarrow (A-3E)\vec{\omega} = 0 \quad \text{und} \quad (A-3E)\vec{v} = \vec{\omega}$$

Nun erfüllt $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ die erste Gleichung

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ die zweite Gleichung

$\vec{v}, \vec{w}$ lin. unabh. Lösungen von $(A-3E)^2\vec{v} = 0$

$$\vec{y}_2 = e^{3x}\vec{v} + x e^{3x}\vec{\omega}$$