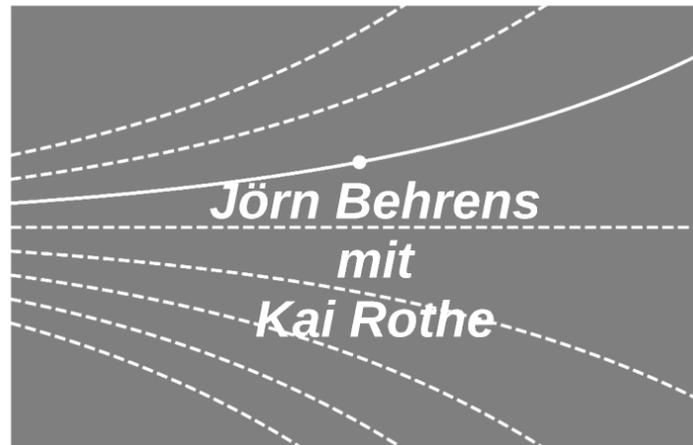


Differentialgleichungen I



Lineare DGL Systeme 1. Ordnung

Buch Kapitel 6.7

Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Motivation: Beispiele für Systeme von DGLn sind

- Zwei-Massen-Schwingung

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \quad (1)$$

$$m_2 x_2'' = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2, \quad (2)$$

wobei x_1, x_2 Koordinaten des Massepunktes, m_1, m_2 die Massen und k_1, k_2, k_3 die Federkonstanten.

- Räuber-Beute-System (Lotka-Volterra Gleichungen)

$$x_1' = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, \quad (3)$$

$$x_2' = k_3 x_1 x_2 - k_4 x_2, \quad (4)$$

mit x_1, x_2 die Anzahl Spezies (Räuber, bzw. Beute) und k_i ($i = 1, \dots, 4$) Wachstums- bzw. Mortalitätsraten.

Definition: (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)

Unter einem **linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung** versteht man eine Gleichung

$$y'(x) = A(x)y(x) + g, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und y und g Spaltenvektoren von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $g \equiv 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Motivation: Beispiele für Systeme von DGLn sind

- Zwei-Massen-Schwingung

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1), \quad (1)$$

$$m_2 x_2'' = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2, \quad (2)$$

wobei x_1, x_2 Koordinaten des Massepunktes, m_1, m_2 die Massen und k_1, k_2, k_3 die Federkonstanten.

- Räuber-Beute-System (Lottka-Volterra Gleichungen)

$$x_1' = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, \quad (3)$$

$$x_2' = k_3 x_1 x_2 - k_4 x_2, \quad (4)$$

mit x_1, x_2 die Anzahl Spezies (Räuber, bzw. Beute) und k_i ($i = 1, \dots, 4$) Wachstums- bzw. Mortalitätsraten.

Definition: (Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)

Unter einem **linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung** versteht man eine Gleichung

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{g}, \quad A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und \mathbf{y} und \mathbf{g} Spaltenvektoren von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $\mathbf{g} \equiv 0$, so heißt das Differentialgleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Bemerkungen:

- Differentialgleichungen k -ter Ordnung lassen sich zu Systemen von k Gleichungen 1. Ordnung reduzieren!
Idee: $x_1 = y$, $x_2 = y'$, $x_3 = y''$, etc.
- Ist $n = 1$, so handelt es sich um eine lineare DGL.

Lösbarkeit

Satz: (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von \mathbf{g} seien stetig im Intervall $]a, b[$. Sei weiter $x_0 \in]a, b[$ und $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^T$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz $]a, b[$.

Satz: (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $]a, b[$, dann besitzt das homogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf $]a, b[$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Satz: (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von \mathbf{g} seien stetig im Intervall $]a, b[$. Sei weiter $x_0 \in]a, b[$ und $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^\top$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

genau eine Lösung auf ganz $]a, b[$.

Satz: (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $]a, b[$, dann besitzt das homogene System

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

auf $]a, b[$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Bemerkungen:

- Ein System von n linear unabhängigen Lösungen des Systems heißt **Fundamentalsystem** oder **Basis** von Lösungen.
- Die Elemente der Basis heißen **Fundamentallösungen**.

Wronski-Matrix

Wronski-Test

Frage: Hätten wir n Lösungen y_1, \dots, y_n gefunden (a_{ij} stetig), können wir dann entscheiden, ob sie ein Fundamentalsystem bilden?

Satz: (Wronski-Test)

Seien y_1, \dots, y_n Lösungen des Systems $y' = A(x)y$ auf $]a, b[$.

Falls $a_{ij}(x)$ stetig in $]a, b[$, dann gilt

1. $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
2. Die Lösungen y_1, \dots, y_n bilden ein Fundamentalsystem auf $]a, b[$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.

Frage: Hätten wir n Lösungen $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ gefunden (a_{ij} stetig), können wir dann entscheiden, ob sie ein Fundamentalsystem bilden?

Definition: (Wronski-Matrix und Wronski-Determinante)

Die **Wronski-Matrix** $Y(x)$ wird durch die Spalten des Fundamentalsystems gebildet:

$$Y(x) := [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_n].$$

Weiter definieren wir die **Wronski-Determinante** des Funktionensystems $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ von Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ als

$$W(x) := \det Y(x)$$

Satz: (Wronski-Test)

Seien $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ Lösungen des Systems $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$ auf $]a, b[$.

Falls $a_{ij}(x)$ stetig in $]a, b[$, dann gilt

1. $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$.
2. Die Lösungen $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $]a, b[$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.

Gesamtheit der Lösungen

Satz: (Gesamtheit der Lösungen)

Durch y_1, \dots, y_n sei auf $]a, b[$ ein Fundamentalsystem von

$$y' = A(x)y$$

gegeben. Dann lässt sich jede Lösung y auf $]a, b[$ schreiben in der Form

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i, \quad \text{konst. } \equiv c_i \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

y in der obigen Form heißt auch **allgemeine Lösung** des homogenen Differentialgleichungssystems.

Bemerkung: Die Linearkombinationen sind Lösungen von $y' = A(x)y$, denn mit $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ gilt:

$$y' = \sum_{i=1}^n c_i y_i' = \sum_{i=1}^n c_i A(x)y_i = A(x) \sum_{i=1}^n c_i y_i = A(x)y.$$

1

Satz: (Hauptvektorklösungen) Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$ -Matrix A mit der algebraischen Vielfachheit σ und v_1, \dots, v_σ linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^{\sigma} v = 0.$$

Dann sind

$$y_k = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j v_k \quad (k = 1, \dots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Systems erster Ordnung $y' = Ay$.

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten) Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$ -Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) v . Dann ist

$$y = e^{\lambda x} v$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $y' = Ay$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV v_1, \dots, v_n , dann bilden die Lösungen

$$y_i = e^{\lambda_i x} v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$y = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} v_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Bemerkung: (Struktur der Lösungsgesamtheit)

- Man kann zeigen, dass genau σ linear unabhängige (LU) Vektoren v_1, \dots, v_σ existieren. Dieser Fundamentalsystem ist konstruierbar, wenn man sich σ linear unabhängige Vektoren v_1, \dots, v_σ wählt.

- Falls die am EW λ_k gehörige algebraische Vielfachheit $\sigma_k < \sigma$ ist, so sind die σ_k linear unabhängigen Vektoren v_1, \dots, v_{σ_k} eine σ_k -fache LU-Lösungsgesamtheit für $y_k = e^{\lambda_k x} v_1, \dots, v_{\sigma_k}$.

- In einem Fall kann man zeigen, dass es σ_k linear unabhängige Vektoren v_1, \dots, v_{σ_k} gibt, die σ_k -fache LU-Lösungsgesamtheit bilden. In diesem Fall sind $y_k = e^{\lambda_k x} v_1, \dots, v_{\sigma_k}$ σ_k -fache LU-Lösungsgesamtheiten für $y_k = e^{\lambda_k x} v_1, \dots, v_{\sigma_k}$.

Wichtig ist, dass $\sum_{k=1}^r \sigma_k = n$.

2

Satz: (Gesamtheit der Lösungen)

Durch $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ sei auf $]a, b[$ ein Fundamentalsystem von

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

gegeben. Dann lässt sich jede Lösung \mathbf{y} auf $]a, b[$ schreiben in der Form

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}_i, \quad \text{konst.} \equiv c_i \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

\mathbf{y} in der obigen Form heißt auch **allgemeine Lösung** des homogenen Differentialgleichungssystems.

Bemerkung: Die Linearkombinationen sind Lösungen von $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$, denn mit $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}_i$ gilt:

$$\mathbf{y}' = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}'_i = \sum_{i=1}^n c_i A(x) \mathbf{y}_i = A(x) \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{y}_i = A(x) \mathbf{y}.$$

1

Satz: (Lösungen von DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten)

Sei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$ -Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$, λ ein Eigenwert (EW) von A mit zugehörigem Eigenvektor (EV) \mathbf{v} .

Dann ist

$$\mathbf{y} = e^{\lambda x} \mathbf{v}$$

eine Lösung des homogenen DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Hat die Matrix A die n voneinander verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit zugehörigen EV $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen

$$\mathbf{y}_i = e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem. Durch die Linearkombination

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i$$

sind sämtliche Lösungen des homogenen DGL-Systems gegeben.

Bemerkungen: (Anwendung der Linearen Algebra)

- Matrizen haben nicht immer paarweise verschiedene EWe, Vielfachheit > 1 möglich. Daher: Fundamentalsystem nur konstruierbar, wenn jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.
- Falls die zum EW λ_k gehörige algebraische Vielfachheit $\sigma_k < n$ mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt, so gibt es σ_k linear unabhängige zugehörige EV $\mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}$, und damit σ_k linear unabhängige Lösungen

$$\mathbf{y}_{k_1} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{y}_{k_{\sigma_k}} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}.$$

- In diesem Fall lassen sich also zu m verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ mit Vielfachheiten $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ n linear unabhängige Lösungen (Fundamentalsystem)

$$\mathbf{y}_{k_1} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_1}, \dots, \mathbf{y}_{k_{\sigma_k}} = e^{\lambda_k x} \mathbf{v}_{k_{\sigma_k}}, \quad (k = 1, \dots, m),$$

konstruieren, denn $\sum_{k=1}^m \sigma_k = n$.

2

Satz: (Hauptvektorklösungen) Sei λ ein Eigenwert der $n \times n$ -Matrix A mit der algebraischen Vielfachheit σ und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\sigma$ linear unabhängigen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E)^\sigma \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Dann sind

$$\mathbf{y}_k = e^{\lambda k} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \mathbf{v}_k \quad (k = 1, \dots, \sigma)$$

linear unabhängige Lösungen des DGL-Systems erster Ordnung $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Methoden: Heuristik für Systeme von DGLs n ord.

• Zwei Massen-Schwingung

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \quad (I)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2 \quad (II)$$

wobei m_1, m_2 Massen der Massenpunkte, m_1, m_2 die Massen und k_1, k_2, k_3 die Federkonstanten.

• Heurist. Ansatz (Laplace-Heuristik) (Übungen)

$$x_1' = A x_1 + B x_2 \quad (I)$$

$$x_2' = C x_1 + D x_2 \quad (II)$$

mit x_1, x_2 die Ansatz Systeme (Vektor, bzw. Spalte) und $A, B, C, D = 1 \times 1, \dots, 1 \times 1$ Matrizen bzw. Skalarkonstanten.

Definition: Lineare Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

Unter einem linearen Differentialgleichungssystem 1. Ordnung versteht man eine Gleichung

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x) \quad A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$$

wobei die $a_{ij}(x)$ Funktionen sind, und y ein n -Komponenten Vektor von n Komponenten, die von x abhängen.

Ist $b(x) = 0$ heißt das Differentialgleichungssystem **homogen**, ansonsten **inhomogen**.

Bezeichnungen:

• Inhomogenes System: Eine Lösung kann sich als System von n Gleichungen 1. Ordnung schreiben!

• Bei $n=1$ geht es über in die gewöhnliche DGL.

Lösbarkeit

Satz (Lösbarkeit linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ und die Komponenten von b seien stetig im Intervall $[a, b]$. Sei weiter $x_0 \in [a, b]$ und $y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^T$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung auf ganz $[a, b]$.

Satz (Lösungen homogener linearer DGL-Systeme 1. Ordnung)

Sind die Elemente $a_{ij}(x)$ der Matrix $A(x)$ stetig im Intervall $[a, b]$, dann besitzt das homogene System

$$y' = A(x)y$$

auf $[a, b]$ genau n linear unabhängige Lösungen.

Bezeichnungen:

• Ein System von n linear unabhängigen Lösungen des Systems heißt **Fundamentalsystem** oder **Bas** von Lösungen.

• Die Elemente der Basis heißen **Fundamentallösungen**.

Differentialgleichungen I



Lineare DGL-Systeme 1. Ordnung
WS 2022/23

Gesamtheit der Lösungen

Satz (Gesamtheit der Lösungen)

Seien y_1, \dots, y_n auf $[a, b]$ ein Fundamentalsystem von

$$y' = A(x)y$$

gegeben. Dann lässt sich jede Lösung y auf $[a, b]$ schreiben in der Form

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i \quad \text{bzw. } y = C \cdot Y(x)$$

• y in der obigen Form heißt auch **allgemeine Lösung** des homogenen Differentialgleichungssystems.

Bei Differentialgleichung (I) ist die allgemeine Lösung $y = C \cdot Y(x)$ die Lösung des homogenen Systems $y' = A(x)y$. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $y' = A(x)y + b(x)$ ist $y = C \cdot Y(x) + y_p(x)$, wobei $y_p(x)$ eine Partikulärlösung ist.

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $y' = A(x)y + b(x)$ ist $y = C \cdot Y(x) + y_p(x)$, wobei $y_p(x)$ eine Partikulärlösung ist.

Wronski-Matrix Wronski-Test

Frage: Können wir n Lösungen y_1, \dots, y_n gefunden (n -stetig),

haben sie dann mindestens, ob sie ein Fundamentalsystem bilden?

Definition: (Wronski-Matrix und Wronski-Determinante)

Die Wronski-Matrix $W(x)$ wird durch die Spalten des Fundamentalsystems gebildet:

$$W(x) = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$$

Wobei die Zeilen der W -Matrix die Komponenten des Fundamentalsystems y_1, \dots, y_n von Lösungen des Systems $y' = A(x)y$ sind.

$$W(x) = (W_{ij}(x))$$

Satz (Wronski-Test)

Seien y_1, \dots, y_n Lösungen des Systems $y' = A(x)y$ auf $[a, b]$.

Falls $W(x) \neq 0$ stetig in $[a, b]$, dann gilt:

1. $W(x) = 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$.

2. Die Lösungen y_1, \dots, y_n bilden ein Fundamentalsystem auf $[a, b]$ genau dann, wenn $W(x) \neq 0$.