Differentialgleichungen I

Winter 2021/22 / J. Behrens

TUHH Technische Universität Hamburg

BITTE BEACHTEN SIE DIE 3G-REGEL!

PLEASE OBEY THE 3G RULE!

Zutritt zur Lehrveranstaltung haben nur:

–VOLLSTÄNDIG GEIMPFTE
–GENESENE
–GETESTETE
(negatives Testergebnis ist max. 24 Std. gültig)

Sollten Sie dies nicht nachweisen können, müssen Sie bitte den Raum jetzt verlassen.
Andernfalls droht ein Hausverbot!

Vielen Dank für Ihr Verständnis.
Schützen Sie sich und andere!

Admission to the course is restricted to persons who are:

–FULLY VACCINATED
–RECOVERED
–TESTED
(negative test result is valid for max. 24 hours)

If you cannot prove this, please leave the room now.
Otherwise you could be banned from the room!

Thank you for your understanding.
Protect yourself and others!

1 Erinnerung:

$$F(x, y', y'') = 0$$

Idee:

- **Substitution**: mit $v := y'$ ergibt sich DGL 1. Ordnung:

$$F(x, v, v') = 0$$

- **Integration**: Falls $v = \Psi(x, C)$ allgemeine Lösung der DGL 1. Ordnung ist, so ist

$$y(x) = \int \Psi(x, C)\, dx + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}$$

allgemeine Lösung der DGL 2. Ordnung.

Beispiel: $y'' = 5y' \ln x \qquad x > 0$

oder $\quad y'' - 5y' \ln x = 0 =: F(x, y', y'')$

- $v = y' \Rightarrow v' = 5 \ln x \, v$

- Trennung der Variablen:

$$\int \frac{dv}{v} = 5x \ln x - 5x + C$$

$$\Rightarrow \ln|v| = 5x \ln x - 5x + C$$

$$\Rightarrow v = C_1 e^{5x \ln x - 5x}$$

$$= C_1 x^{5x} e^{-5x} = C_1 \left(\frac{x}{e}\right)^{5x}$$

NR:

$$v' = \frac{5 \ln x}{\frac{1}{v}}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int 5 \ln x \, dx$$

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$$

part. Integration

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \cdot \ln x - x + C$$

- Integration

$$y(x) = C_1 \int x^{5x} e^{-5x} \, dx + C_2$$

Lösung der DGL 2. Ordnung

(2)

Betrachte:
Sei nun die DGL 2. Ordnung gegeben, wobei x nicht explizit auftaucht:

$$F(y, y', y'') = 0$$

Lösungsidee:

- **Substitution**: mit $v(y) := y'$ ergibt sich durch die Kettenregel:

$$y'' = \frac{d}{dx}v(y) = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v'(y)y' = v'(y)v(y)$$

  Also erhält man eine DGL 1. Ordnung für v: $F(y, v, v'v) = 0$.

- **Integration**: Falls $v = \Psi(x, C)$ allgemeine Lösung der DGL 1. Ordnung ist, so ist mit $v(y) = y'$

$$y' = \Psi(y, C)$$

  eine DGL mit trennbaren Veränderlichen für y gegeben, mit allgemeiner impliziter Lösung

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\zeta}{\Psi(\zeta, C)} = x + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

2

Beispiel: $\quad y'' = -\frac{y'^2}{5y} \qquad y > 0$

- Substitution $v(y) = y'$ bzw. $y'' = v' \cdot v$

$\Rightarrow v v' = \frac{-v^2}{5y}$ DGL 1. Ordnung

$\Rightarrow \frac{v'}{v} = -\frac{1}{5y}$

NR:
$v(y) = y'(x)$
$\frac{dv}{dx} = v'(y) \cdot y'(x)$
$= v' \cdot v$

- Trennung der Variablen:

$\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{5} \ln|y| + C$

$\Rightarrow \quad v(y) = C_1 \, y^{-\frac{1}{5}}$

- Wegen $y' = v(y)$

$\Rightarrow \quad y' = C_1 \, y^{-\frac{1}{5}}$

- Wende wieder Trennung der Variablen an:

$\int y^{\frac{1}{5}} \, dy = C_1 x + C_2$ bzw. $\frac{5}{6} y^{\frac{6}{5}} = C_1 x + \tilde{C}_2$

$\Leftrightarrow \frac{5}{6} y^{\frac{6}{5}} + C = C_1 x + C_2$

- Damit haben wir als Lösung:

$y(x) = [C_3 x + C_4]^{\frac{5}{6}}$

3

Betrachte:
DGL der Form $y' = \phi(\frac{y}{x})$, mit $x \neq 0$ und ϕ stetig.

Lösungsidee:

- **Substitution**: mit $u = \frac{y}{x}$ ergibt sich:

$$y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = u + xu' = \phi(u)$$

und damit

$$xu' = \phi(u) - u \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{\phi(u) - u}{x}.$$

- **Trennung der Variablen**: Als Lösung erhält man

$$\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{\phi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

Beispiel: $y' = \frac{xy}{x^2-y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1-(\frac{y}{x})^2} = \phi(\frac{y}{x})$

- $\phi(u) = \frac{u}{1-u^2}$
- Es gilt: $\int \frac{du}{\frac{u}{1-u^2} - u} = \ln|x| + C$

$\Rightarrow \int \frac{1-u^2}{u - u(1-u^2)} \, du = \ln|x| + C$

$\Rightarrow \int \frac{1-u^2}{u^3} \, du = \ln|x| + c$

$\Rightarrow -\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + C$

- Rücksubstitution:

$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|y| + C \Rightarrow |y| = e^{-\frac{x^2}{2y^2} - c}$

$\Rightarrow y = c_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$

$\Rightarrow y - c_1 e^{-\frac{x^2}{2y^2}} = 0$

(4) **Berechnung für den Fall** $k = 2$:

- Eulersche DGL (homogen): $a_0 y + a_1 x y' + a_2 x^2 y'' = 0$.
- Substitution ergibt: $a_0 + a_1 r + a_2 r(r-1) = 0$, quadratisches Polynom.
- Differenzieren bestätigt: $y = x^r$ ist Lösung der homogenen Euler DGL, falls r Nullstelle des Polynoms.
- Sind $r_1 \neq r_2$ reelle Nullstellen des Polynoms, so sind $y_1 = x^{r_1}$ und $y_2 = x^{r_2}$ Lösungen der DGL.
- Sind $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ komplexe Nullstellen, so ist mit $r_1 = a + ib$ auch $r_2 = \bar{r}_1 = a - ib$ Nullstelle.
- Komplexe Lösung für $y = x^r$:

  $$x^{a+ib} = e^{\ln x^{a+ib}} = e^{(a+ib)\ln x} = e^{a \ln x} e^{ib \ln x} = x^a[\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)]$$

- Für komplexe Lösungen des Nullstellenproblems erhält man daher

  $$y_1(x) = x^a \cos(b \ln x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = x^a \sin(b \ln x)$$

  zwei Lösung der homogenen Eulerschen DGL.
- Allgemeine Lösung: wegen der Linearität ist die allgemeine Lösung

  $$y(x) = c_1 x^a \cos(b \ln x) + c_2 x^a \sin(b \ln x).$$

4

Beispiel: $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$ Ansatz $x^r = y(x)$

Polynom $\Rightarrow$ $2 + 4r + r(r-1) = r^2 + 3r + 2 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow$ $r_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $r_1 = -1 \qquad r_2 = -2$

$\Rightarrow$ $y(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{1}{x^2}$