Differentialgleichungen I

Woche 02 / J. Behrens

TUHH
Technische Universität Hamburg

BITTE BEACHTEN SIE DIE 3G-REGEL!
PLEASE OBEY THE 3G RULE!

Zutritt zur Lehrveranstaltung haben nur:

- VOLLSTÄNDIG GEIMPFTE
- GENESENE
- GETESTETE

(negatives Testergebnis ist max. 24 Std. gültig)

Sollten Sie dies nicht nachweisen können, müssen Sie bitte den Raum jetzt verlassen.
Andernfalls droht ein Hausverbot!

Vielen Dank für Ihr Verständnis.
Schützen Sie sich und andere!

Admission to the course is restricted to persons who are:

- FULLY VACCINATED
- RECOVERED
- TESTED

(negative test result is valid for max. 24 hours)

If you cannot prove this, please leave the room now.
Otherwise you could be banned from the room!

Thank you for your understanding.
Protect yourself and others!

Idee:
Sei eine DGL gegeben in der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)},$$

so heist sie Differentialgleichung mit trennbaren Variablen.
Seien $g(x)$ und $h(y)$ für $(x,y) \in D_f$ stetig und $h(y) \neq 0$.

- Es existiert nach Existenzsatz mindestens eine Lösung.
- Seien
$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt, \quad \text{und} \quad H(y) = \int_b^y h(t)\,dt$$
Stammfunktionen zu g und h, sowie H^{-1} Umkehrfunktion von H (d.h. $H^{-1}(H(y)) = y$).
- Schreibe die DGL in der Form $h(y)y' = g(x)$ so ergibt Integration die Lösung der DGL:
$$H(y(x)) = G(x) + C$$
- Anwendung der Umkehrfunktion ergibt
$$y(x) = H^{-1}[H(y(x))] = H^{-1}[G(x) + C].$$

1

(1) Beispiel: Sei $y' = xy$ mit $y > 0$ oder $y < 0$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_0$$

also
$$|y| = e^{\frac{x^2}{2} + C_0} = \underbrace{e^{C_0}} e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow y = \pm e^{C_0} e^{\frac{x^2}{2}} = \pm C e^{\frac{x^2}{2}} \quad (\text{mit } C = e^{C_0})$$

Für $C = 0 \Rightarrow y = 0$

② Beispiel einer chemischen Reaktion:

- Chem. Reaktion 1. Ordnung
- Sättigungskonzentration c_0
- Reaktionskonstante $k > 0$
- t math. Variable

$$\left.\right\} \quad \boxed{y' = k(c_0 - y)}$$

Frage: wie wenden wir Trennung der Variablen an?

$$g(t) = k = \text{konst.}$$

$$h(y) = \frac{1}{(c_0 - y)} \qquad \Rightarrow \quad y' = \frac{g(t)}{h(y)}$$

Also:

$$\int \frac{dy}{c_0 - y} = \int k\,dt \quad \Rightarrow \quad -\ln|c_0 - y| = \ln \frac{1}{|c_0 - y|}$$

$$= kt + C$$

Nach y aufgelöst:

$$\frac{1}{|c_0 - y|} = e^{kt + C} = e^{C} e^{kt}$$

$$\Rightarrow \quad c_0 - y = \pm e^{-C} e^{-kt} = \tilde{C} e^{-kt}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = c_0 - \tilde{C} e^{-kt}$$

Lösungsidee 2: (Variation der Konstanten)
Für die allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL $y' + p(x)y = 0$ variiere C, d.h. betrachte $C = C(x)$.

- Ansatz:
$$y(x) = C(x)e^{-P(x)}.$$
- Einsetzen:
$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)p(x)e^{-P(x)} + p(x)C(x)e^{-P(x)} = q(x).$$
- Umformen und Integrieren:
$$C'(x)e^{-P(x)} = q(x) \quad \Rightarrow \quad C'(x) = q(x)e^{P(x)}$$
$$\Rightarrow \quad C(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt + C_1 \quad C_1 \equiv \text{konst.}, C_1 \in \mathbb{R}.$$
- Verwendung des Ansatzes:
$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-P(x)}\left(C_1 + \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt\right) \\ &= C_1 e^{-P(x)} + e^{-P(x)}\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt \\ &= y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{inh}}(x). \end{aligned}$$

③ Annahme: $\tilde{y}(x)$ erfülle die Gleichung $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ (*)

Es gilt: $y_{inh}(x)$ erfüllt (*) auch

Dann: $[\tilde{y}(x) - y_{inh}(x)]$ erfüllt die homogene DGL:

$$[\tilde{y}(x) - y_{inh}(x)]' + p(x)[\tilde{y}(x) - y_{inh}(x)] = 0$$

Löse mit $\tilde{C}$ konst.

$$\tilde{y}(x) = y_{inh}(x) + \tilde{C}e^{-P(x)} = e^{-P(x)}\left(\tilde{C} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{P(s)}\,ds\right)$$

D.h. die beliebige Lösung $\tilde{y}(x)$ von (*) ist also auch wieder durch die Gleichung

$$y(x) = C_1 e^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int_{x_0}^{x} q(\xi) e^{P(\xi)} d\xi \quad **$$

beschrieben, d.h. $y(x) = y_{inh}(x) + y_{hom}(x)$

Anfangswerte: $y(x_0) = y_0$

$$\overset{**}{\Longrightarrow} \quad y(x) = e^{-P(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(\xi) e^{-P(\xi)} d\xi \right)$$

Die Stammfkt. P war so gewählt dass $P(x_0) = 0$.

(4) Bernoulli Gl.: $y' + p(x) y = q(x) y^n$

Ist $n \in \mathbb{R}$, so müssen wir voraussetzen, dass $y > 0$
Für $n \in \mathbb{N}$ ist das nicht notwendig.
Seien $p(x)$ und $q(x)$ auf einem geeigneten Intervall stetig.

Substituiere: $u(x) := y^{1-n}$, dann folgt:

$$u' + (1-n) p(x) u = q(x)(1-n)$$

Diese lineare Gleichung ist leicht zu lösen.
Anschließende Rücksubstitution ergibt dann die Lösung y.