Aufgabe 1: (1+4 Punkte)

a) Man bestimme durch Separation die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$xy' - 3y = 0.$$

b) Man löse die folgende Anfangswertaufgabe mit der Bernoullischen Differentialgleichung

$$y' - y + 2y^2 = 0 \quad \text{und} \quad y(0) = \frac{1}{3}.$$

Lösung:

a) (1 Punkt)

$$xy' - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = 3\ln|x| + c = \ln|x^3| + c \quad \Rightarrow \quad y = kx^3$$

b) (4 Punkte)

Bernoullische Differentialgleichung:

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = y' - y + 2y^2 = 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2,\ a(x) = -1,\ b(x) = 2\,.$$

Substitution: $u(x) = y^{(1-\alpha)}(x) = \dfrac{1}{y(x)} \Leftrightarrow y(x) = u^{1/(1-\alpha)}(x) = \dfrac{1}{u(x)}$

Transformierte lineare inhomogene Differentialgleichung:

$$u'(x) + (1-\alpha)a(x)u(x) = (\alpha - 1)b(x) \quad \Rightarrow \quad u' + u = 2\,.$$

allgemeine homogene Lösung: $u_h(x) = ke^{-x}$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Ansatz für eine spezielle inhomogene Lösung: $u_p(x) = c \quad \Rightarrow \quad c = 2$

allgemeine Lösung und Rücktransformation:

$$\Rightarrow \quad u(x) = ke^{-x} + 2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{ke^{-x} + 2}$$

Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} = y(0) = \frac{1}{k+2} \quad \Rightarrow \quad k = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{e^{-x} + 2}$$

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Man berechne die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,.$$

Hinweis: Es gilt $(1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2)$.

Lösung:

(3 Punkte)

Berechnung der Eigenwerte der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren durch $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^1$ zu $\lambda_1 = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^2$ zu $\lambda_2 = 0$ sowie $\boldsymbol{v}^3$ zu $\lambda_3 = 2$, da $\boldsymbol{A}$ symmetrisch ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor $\boldsymbol{v}^3$ zu $\lambda_3 = 2$: (nochmal zur Bestätigung)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ lautet die allgemeine Lösung:

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y'' + y' - 2y = e^x\ , \quad y(0) = 1\ ,\ y'\,(0) = \frac{4}{3}\ .$$

Lösung:

a) (1 Punkt)
allgemeine homogene Lösung für $y'' + y' - 2y = 0$
charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$$

allgemeine homogene Lösung: $\quad y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) (1 Punkt)
Ansatz für eine spezielle inhomogene Lösung:
$y_p(x) = axe^x$, denn für Inhomogenität $e^{\mu x} = e^x$ gilt $\mu = 1 = \lambda_1$.
Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$(axe^x)'' + (axe^x)' - 2axe^x = ((x+2) + (x+1) - 2x)ae^x = 3ae^x \stackrel{!}{=} e^x$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = \frac{1}{3}xe^x$$

c) (1 Punkt)
allgemeine inhomogene Lösung: $\quad y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x$

d) (1 Punkt)
$y'(x) = c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x} + \frac{1}{3}(x+1)e^x$ und die Anfangswerte ergeben:
$1 = y(0) = c_1 + c_2 \ \Rightarrow\ c_1 = 1 - c_2,$
$\frac{4}{3} = y'(0) = c_1 - 2c_2 + \frac{1}{3} = 1 - c_2 - 2c_2 + \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ c_2 = 0 \ \Rightarrow\ c_1 = 1.$
Lösung der Anfangswertaufgabe: $\quad y(x) = e^x + \frac{1}{3}xe^x$

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y'' + y = 0.$$

a) Man gebe ein komplexes Fundamentalsystem an,

b) bestimme die allgemeine reelle Lösung und

c) berechne alle Lösungen der zugehörigen Randwertaufgabe mit den Randwerten $y(0) = 2$ und $y(\pi) = -2$.

Lösung:

a) (1 Punkt)

charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm i$

komplexes Fundamentalsystem

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)\,, \quad e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$

b) (1 Punkt)

allgemeine reelle Lösung:

$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c) (1 Punkt)

Aus den Randbedingungen erhält man:

$2 = y(0) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2 \quad \text{und}$

$-2 = y(\pi) = c_1\cos(\pi) + c_2\sin(\pi) = -c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2$

alle Lösungen der Randwertaufgabe: $y(x) = 2\cos(x) + c_2\sin(x) \quad \text{mit} \quad c_2 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Gegeben sei das System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + 2y - 4 \\ \dot{y} &= 2x + y - 5\,. \end{aligned}$$

a) Man schreibe das System in Matrix-Vektor-Darstellung,

b) berechne alle stationären Lösungen (Gleichgewichtspunkte)

c) und untersuche deren Stabilitätsverhalten.

d) Man berechne die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems.

Lösung:

a) (1 Punkt)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) (1 Punkt)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Man erhält den Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{x}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) (1 Punkt)

Die Eigenwerte λ_1, λ_2 sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

Da $\lambda_1 = -1 < 0 < \lambda_2 = 3$ gilt, ist $\boldsymbol{x}^*$ ein instabiler Sattelpunkt.

d) (2 Punkte)

Der Gleichgewichtspunkt $\boldsymbol{x}^*$ löst das (inhomogene) Differentialgleichungssystem und die Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ stehen senkrecht aufeinander, wegen der Symmetrie der Systemmatrix.

Eigenvektor $\boldsymbol{v}_1$ zu $\lambda_1 = -1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allgemeine Lösung des Systems:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$