Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Struckmeier

WiSe 2020/2021

Klausur zur Mathematik III
(Modul: Differentialgleichungen I)

29. März 2021

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträgern gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Stg:	AIW	BU	BV	CI CS	ET	EUT	GES	IN IIW	LUM	MB	MTB MEC	SB	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐   Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	Punkte	Korrekteur
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1: (3 Punkte)

a) Geben Sie an, welche der folgenden Differentialgleichungen separierbar, linear, Bernoullisch oder Riccatisch sind.

(i) $y'(t) - 2e^{2t}y(t) + 3y(t)^2 = 1 + e^{2t}$.

(ii) $y'(t) = e^{-t} \cdot \left(\dfrac{y(t)^3 + 3y(t)}{y(t)^2 + 1} \right)$.

(iii) $y'(t) + \sin(t)y(t) = t^2$.

(iv) $y'(t) + 2y(t) - t\,y(t)^4 = 0$.

b) Geben Sie eine Substitutionen an, die die Bernoullische Differentialgleichung aus a) in eine lineare Differentialgleichung überführt. Wie lautet die durch die Substitution erhaltene neue Differentialgleichung?

Hinweis: Sie müssen die Differentialgleichungen nicht lösen!

Lösung 1:

a) **(2 Punkte)**

(i) Riccattisch.

(ii) Separierbar.

(iii) Linear.

(iv) Bernoullisch.

b) **(1 Punkt)**

Mit $\alpha = 4$, $a = 2$ und $b = t$ und $u = y^{1-\alpha} = y^{-3}$ erhält man für u die Differentialgleichung

$$u'(t) - 6u(t) = -3t.$$

****

Aufgabe 2: (5 Punkte)

a) Prüfen Sie für jede der folgenden Differentialgleichungen, ob sie exakt ist.

(i) $2y(t)^2 + (t^2y(t) - 1)y'(t) = 0\,.$

(ii) $2ty(t)^2 + (2y(t) + 2y(t)t^2)y'(t) \;=\; 0\,.$

b) Bestimmen Sie für die exakte Differentialgleichung aus Teil a) ein zugehöriges Potential und die allgemeine Lösung.

Lösung:

a) (i) $2y^2 + (t^2y - 1)y' = 0\,.$
Mit $g(t, y) = 2y^2$ und $h(t, y) = t^2y - 1$ folgt $g_y = 4y \neq 2ty = h_t\,.$
Die Differentialgleichungen ist also nicht exakt. **(1 Punkt)**

(ii) $2ty^2 + (2y + 2yt^2)y' \;=\; 0\,.$
Mit $g(t, y) = 2ty^2$ und $h(t, y) = 2y + 2yt^2$ folgt $g_y = 4ty = h_t\,.$
Die Differentialgleichungen ist also exakt. **(1 Punkt)**

b) Wir bestimmen ein Potential zur Differentialgleichung aus Teil a)ii).

$$\Phi_t \overset{!}{=} g(t, y) = 2ty^2 \qquad\qquad \Rightarrow \quad \Phi = t^2y^2 + c(y)\ \textbf{(1 Punkt)}$$

$$\Phi_y = c'(y) + 2yt^2 \overset{!}{=} 2y + 2yt^2 \quad \Rightarrow \quad c'(y) = 2y \;\Leftarrow\; c(y) = y^2\,.$$

Durch $\Phi(t, y) = t^2y^2 + y^2$ ist also ein Potential gegeben. **(1 Punkt)**

$\Rightarrow$ Die Lösungen der Differentialgleichung erfüllen $\Phi(t, y) = C$

$C = y^2(1 + t^2) \Rightarrow\;\; y(t) \;=\; \pm\sqrt{\frac{C}{1+t^2}}\,.$ **(1 Punkt)**

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t)\,.$$

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems.

Lösung 3:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 9 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 36.$$

Die Eigenwerte der Systemmatrix sind gegeben durch

$$(1-\lambda)^2 = -36 \Longleftrightarrow 1-\lambda = \pm 6i \Longrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 6i\,.$$

Den Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1 + 6i$ erhalten wir als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -6i & -4 \\ 9 & -6i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jeder Vektor mit $z_2 = -\frac{3i}{2} z_1$ erfüllt das System. Wir können also zum Beispiel $(2, -3i)^T$ wählen. Der konjugiert komplexe Vektor ist ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = 1 - 6i$.

Damit erhalten wir das komplexe Fundamentalsystem

$$\boldsymbol{u}(t) = e^{(1+6i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}(t) = e^{(1-6i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ +3i \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(3 Punkte)}$$

Bemerkung: Für die volle Punktzahl ist die Angabe des zweiten Eigenvektors und der zweiten komplexen Lösung nicht nötig.

Ein reelles Fundamentalsystem ist zum Beispiel gegeben durch

$\boldsymbol{Y}(t) := \left(\boldsymbol{y}^{[1]}(t), \boldsymbol{y}^{[2]}(t)\right) = (\operatorname{Re}(\boldsymbol{u}(t)), \operatorname{Im}(\boldsymbol{u}(t)))\,.$

Wegen $\boldsymbol{u}(t) = e^t(\cos(6t) + i \cdot \sin(6t)) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2\cos(6t) + i\,2 \cdot \sin(6t) \\ -3i\cos(6t) + 3\sin(6t) \end{pmatrix}$

erhält man

$\boldsymbol{y}^{[1]}(t) = e^t \begin{pmatrix} 2\cos(6t) \\ 3\sin(6t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}^{[2]}(t) = e^t \begin{pmatrix} 2\sin(6t) \\ -3\cos(6t) \end{pmatrix}$.**(3 Punkte)**

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei das lineare System $\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & -2+\alpha & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t)$.

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0,0,0)^T$ in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Entwicklung nach der zweiten Zeile ergibt das charakteristische Polynom:

$$P(\lambda) = (-2+\alpha-\lambda)\,[(-3-\lambda)(2-\lambda)\; + 6\,] = \;(-2+\alpha-\lambda)(\lambda^2+\lambda-6+6\,)\,.$$

(Ansatz und Polynom: 1 Punkt)

Eigenwerte : $\lambda_1 = -2+\alpha, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -1$ **(1 Punkt)**

$\alpha > 2 \iff \lambda_1 > 0 \iff$: Ruhelage ist instabil **(1 Punkt)**

$\alpha < 2$: Die Realteile aller Eigenwerte sind kleiner oder gleich Null. Es gibt einen einfachen Eigenwert mit Realteil Null. Die Ruhelage ist gleichmäßig stabil. **(1 Punkt)**

$\alpha = 2 \implies \lambda_1 = 0,\, \lambda_2 = 0,\, \lambda_3 = -1$.

Eigenraum zum doppelten EW Null:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -3v_1 + v_2 + 3v_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ -2v_1 + 0\cdot v_2 + 2v_3 = 0 \quad \implies v_1 = v_3 \end{cases}$$

Setzt man das Ergebnis aus der letzten Zeile in die erste Zeile ein, so folgt

$$v_2 = 0$$

Es gibt nur eine Eigenvektorrichtung

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum algebraisch zweifachen Eigenwert Null. Die Nulllösung ist instabil. **(2 Punkte)**