

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg
Wintersemester 2019/2020

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 2, 4., erweiterte Auflage. WILEY-VCH, Berlin, 2011.
- H. J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: Mathematik für Ingenieure, Band 3: Aufgaben und Lösungen. WILEY-VCH, Berlin, 2000.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2. Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Inhalte Differentialgleichungen I

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

- Beispiele gewöhnlicher Differentialgleichungen.
- Elementare Lösungsmethoden.
- Existenz und Eindeutigkeit bei Anfangswertaufgaben.
- Lineare Systeme 1. Ordnung, Systeme mit konstanten Koeffizienten.
- Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung.
- Laplace–Transformation bei Differentialgleichungen.
- Stabilität von Lösungen.
- Randwertaufgaben, Variationsrechnung.
- Numerische Verfahren für Anfangswertaufgaben.
- Numerische Verfahren für Randwertaufgaben.

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Einführung und Beispiele

Definition: Ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0 \quad \text{für } t \in [a, b]$$

mit

$$\mathbf{F} : [a, b] \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{(m+1)\text{-fach}} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{für } [a, b] \subset \mathbb{R}$$

heißt *implizites gewöhnliches Differentialgleichungssystem der Ordnung m* .

Lässt sich das System nach $\mathbf{y}^{(m)}(t)$ auflösen, so erhält man das *explizite System*

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t)) \quad \text{für } [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

Wir verwenden im Folgenden die Abkürzung **DGL** für **Differentialgleichung** bzw. **Differentialgleichungssystem**. □

Im Folgenden suchen wir eine **Lösung** y der DGL, d.h. eine C^m -Funktion

$$y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

die das Differentialgleichungssystem (DGL) erfüllt: Für $t \in [a, b]$ gilt also

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

beziehungsweise

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Spezialfall: Hängen die Funktionen \mathbf{F} bzw. \mathbf{f} nicht explizit von (der Zeit) t ab, so nennt man das System **autonom**, d.h.

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

oder

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Lösungen y nennt man dann auch **Trajektorien** der DGL.

Autonome DGL, Anfangs- und Randwertaufgabe

Beispiel: Die skalare **autonome** Gleichung erster Ordnung

$$y'(t) = y(t)$$

hat auf jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen der Form

$$y(t) = C \cdot e^t \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), & a \leq t \leq b, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a & \text{(Anfangswert)} \end{cases}$$

Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = f(t, \mathbf{y}(t)), & a \leq t \leq b, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0 & \text{(Randwert)} \end{cases}$$

Beispiel 1: Populationsmodell I

Sei $N(t)$ die Größe einer Population, zum Beispiel Bakterien auf einem Nährboden. Die Änderung der Population in kleinen Zeitabschnitten wird bestimmt durch

die Geburtenrate b und die Sterberate d .

Dann gilt

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx (b - d)N(t)$$

Im Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$ erhält man die **Differentialgleichung**

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t) \quad \text{mit } \alpha = b - d$$

Mit dem Anfangswert $N(t_0) = N_0$ ergibt sich die **eindeutige** Lösung

$$N(t) = N_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

Die Population besitzt also ein **exponentielles Wachstum**. □

Beispiel 2: Populationsmodell II

Bei exponentiellem Wachstum gilt für $\alpha > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$$

und das ist **unrealistisch** (zum Beispiel: Weltbevölkerung).

Suche also ein Modell mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K < \infty$$

VERHULST: Wachstumsrate ist eine mit $N(t)$ linear fallende Funktion

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)(K - N(t))$$

Die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe lautet dann

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\lambda K(t-t_0)}}$$

und man spricht hier vom **logistischen Wachstum**. □

Beispiel 3: Das Regelkreisglied

Mechanisches Feder-Dämpfer-System mit Anregung

$$y_e(t) = \text{vorgegebene Eingangsgröße}$$

$$y_a(t) = \text{Ausgangsgröße}$$

$$K_F(t) = K(y_e(t) - y_a(t)) = \text{Federkraft}$$

$$K_D(t) = r y'_a(t) = \text{Dämpferkraft}$$

wobei K die Federkonstante und r den Dämpfungskoeffizienten bezeichnet.

Modellierung als **gewöhnliche Differentialgleichung** liefert

$$y'_a(t) = -\lambda y_a(t) + \lambda y_e(t) \quad \text{mit } \lambda = \frac{K}{r}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems bei Vorgabe von $y_e(t)$, $t \geq t_0$ ist

$$y_a(t) = y_a(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^t y_e(\tau)e^{\lambda(\tau-t)} d\tau$$

□

Beispiel 4: Die Newtonsche Abkühlung

Für die **Temperatur** $T(t)$ eines homogenen Körpers gilt (vereinfacht) die DGL

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k \cdot F}{c \cdot m} (T_a(t) - T(t))$$

Dabei ist

$T_a(t)$ = Umgebungstemperatur

m = Masse des Körpers

F = Oberfläche

c = spezifische Wärme

k = Proportionalitätsfaktor

Die Gleichung ist identisch mit der des **Regelkreisglieds** und insbesondere gilt

$$T(t) \longrightarrow T_a(t) \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

für

$$T(t) = T(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^t T_a(\tau)e^{\lambda(\tau-t)} d\tau.$$

Beispiel 5: Der elektrische Schwingkreis

Gegeben seien

der Ohmsche Widerstand R ,
die Induktivität L ,
die Kapazität C .

Für die Spannungsabfälle gilt

$$U_R = R \cdot I, \quad U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}, \quad I = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

sowie bei vorgegebener Spannung $U(t)$

$$U_R + U_L + U_C = U(t)$$

Wir ersetzen in U_R und U_L die Variable I durch $C \cdot dU_C/dt$, und erhalten

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2U_C}{dt^2} + U_C = U(t)$$

Der elektrische Schwingkreis (Fortsetzung)

Der Schwingkreis wird modelliert durch eine **Differentialgleichung zweiter Ordnung**:

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u(t)$$

Typisch ist die Vorgabe einer Wechselspannung, also $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$.

Beobachtung: Anfangswertproblem mit Vorgabe von

$$u_C(t_0) = C_1 \quad \text{und} \quad \frac{du_C}{dt}(t_0) = C_2$$

Es existiert auch eine Darstellung als **System erster Ordnung**,

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{R}{L} y_2 - \frac{1}{LC} y_1 + \frac{1}{LC} u \end{aligned}$$

wobei $y_1 := u_C$ und $y_2 := du_C/dt$. □

Richtungsfeld einer skalaren Gleichung 1. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit } y(t) \in \mathbb{R}$$

Betrachte an jedem Punkt $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ den Richtungsvektor

$$v = (1, y')^T$$

in der Tangentenrichtung $y' = f(t, y)$.

Definition: Ein Tripel $(t, y, y') \in \mathbb{R}^3$, das die Gleichung $y' = f(t, y)$ erfüllt, nennt man ein **Linienelement** der Differentialgleichung. □

Beispiele:

- Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = y$.
- **“Erraten”** der Lösung aus einer Skizze des Richtungsfelds: Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

Ein Beispiel zum Richtungsfeld

Die **Linienelemente** der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

sind gegeben durch die Tripel $\left(t, y, -\frac{t}{y}\right) \in \mathbb{R}^3$.

Der **Richtungsvektor** v im Punkt (t, y) ist gegeben durch

$$v = (1, y')^T = \left(1, -\frac{t}{y}\right)^T$$

und es gilt

$$v \perp r = (t, y)^T \quad \text{mit dem Ortsvektor } r$$

Die Lösungen sind (geometrisch gesehen) Kreise in der (t, y) -Ebene

$$y(t) = \pm\sqrt{r^2 - t^2} \quad (-r < t < r)$$

□

1.2 Elementare Lösungsmethoden

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Lösungsmethoden für folgende Typen **einfacher** gewöhnlicher Differentialgleichungen.

- Separierbare Differentialgleichungen
- Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen
- Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung
- Bernoullische Differentialgleichungen
- Riccatische Differentialgleichungen
- Exakte Differentialgleichungen

Typ A: Separierbare Differentialgleichungen

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \cdot g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

in einem Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der (t, y) -Ebene.

Gilt $g(y) \neq 0$, so lassen sich die Variablen t und y trennen:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t)$$

Integration unter Verwendung der **Substitutionsregel** ergibt

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

Separierbare Differentialgleichungen (Fortsetzung)

Bezeichnen wir mit $H(y)$ eine Stammfunktion von $1/g(y)$, also

$$H(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$$

so folgt wegen

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

gerade

$$H(y) = H(y_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

Da $g(y) \neq 0$, ist die Stammfunktion $H(y)$ injektiv und daher invertierbar:

$$y(t) = H^{-1} \left(H(y_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right)$$

□

Ein Beispiel für eine separierbare DGL

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y'(t) = -t/y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Trennung der Variablen ergibt

$$y y' = -t \quad \Rightarrow \quad \int_{y_0}^y \eta d\eta = - \int_{t_0}^t \tau d\tau$$

Damit folgt

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) \quad \Rightarrow \quad y^2 + t^2 = y_0^2 + t_0^2 = r^2$$

Wir erhalten also als Lösung einen Kreis um den Ursprung in der (t, y) -Ebene mit Radius r^2 . □

Typ B: Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

läßt sich mit Hilfe der Substitution

$$u(t) := \frac{y(t)}{t}$$

auf eine separierbare Gleichung zurückführen. Wir schreiben

$$f(u) = y'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t)$$

Auflösung nach $u'(t)$ ergibt die separierbare Gleichung

$$u'(t) = \frac{f(u) - u}{t}.$$

□

Beispiel für eine Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

Gesucht ist die Ortslinie aller Punkte, für die der Tangentenabschnitt auf der y -Achse gleich dem Abstand des Punktes vom Ursprung ist.

Das Problem wird modelliert durch die zugehörige Differentialgleichung

$$y - ty' = \sqrt{t^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{t} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}.$$

Wir verwenden die Substitution $u = y/t$:

$$u' = -\frac{\sqrt{1 + u^2}}{t}$$

Eine Trennung der Variablen liefert zunächst

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\int \frac{dt}{t}$$

und damit

$$\log\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) = -\log|t| + C_1.$$

Ähnlichkeitsdifferentialgleichung (Fortsetzung)

Aus der bekannten Beziehung (siehe Analysis II)

$$\operatorname{arsinh}(u) = \log \left(u + \sqrt{1 + u^2} \right)$$

folgt

$$u = \sinh(-\log |t| + C_1)$$

und damit durch Rücksubstitution

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{C_1}}{t} - te^{-C_1} \right)$$

Wählt man $C = e^{C_1}$, so erhalten wir

$$2y = C - \frac{t^2}{C}$$

und es ergibt sich als Lösung die Parabelschar

$$t^2 = C^2 - 2Cy.$$

Typ C: Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

- **Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung** sind von der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) = h(t).$$

- Man nennt die Funktion $h(t)$ die **Inhomogenität** der Gleichung.
- Die Differentialgleichung heißt **homogen**, falls $h(t) = 0$ gilt.
- Die **allgemeine Lösung** läßt sich stets in der Form

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

schreiben.

- Dabei ist $y_p(t)$ eine **spezielle** (oder partikuläre) Lösung, und $y_h(t)$ ist die **allgemeine** Lösung der **homogenen** Gleichung

$$y_h'(t) + a(t)y_h(t) = 0$$

□

I. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

Eine Trennung der Variablen

$$y_h'(t) + a(t)y_h(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y_h'}{y_h} = -a(t)$$

ergibt mit Hilfe einer Integration

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = - \int a(t) dt$$

die **allgemeine Lösung**

$$y_h(t) = C \cdot \exp \left(- \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right)$$

mit einer beliebigen **Integrationskonstanten** $C \in \mathbb{R}$. □

II. Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Dazu verwendet man die Methode der **Variation der Konstanten**

$$y_p(t) = C(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right)$$

Einsetzen in die **inhomogene** Gleichung ergibt

$$C'(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right) - a(t)y_p(t) + a(t)y_p(t) = h(t)$$

Durch **Integration** der Differentialgleichung für $C(t)$ erhalten wir

$$C(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(\xi) d\xi\right) d\tau,$$

und somit

$$y_p(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) \cdot \exp\left(-\int_{\tau}^t a(\xi) d\xi\right) d\tau.$$

□

Spezialfälle zur Berechnung einer speziellen Lösung

Für lineare Gleichungen der Form

$$y'(t) + a \cdot y(t) = h(t) \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

und speziellen Inhomogenitäten $h(t)$ macht man folgende Ansätze:

Inhomogenität $h(t)$	Ansatz für $y_p(t)$
$\sum_{k=0}^m b_k t^k$	$\sum_{k=0}^m c_k t^k$
$b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)$	$c \sin(\omega t - \gamma)$
$b e^{\lambda t}$	$c e^{\lambda t} \quad \text{für } \lambda \neq -a$
	$c t e^{\lambda t} \quad \text{für } \lambda = -a$

Ein Beispiel für einen solchen Spezialfall

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) + y(t) = \sin(t)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_h(t) = C \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t d\tau\right) = C \cdot \exp(t_0 - t)$$

Bei der **Variation der Konstanten** ist der Ansatz

$$y_p(t) = C(t) \cdot \exp(t_0 - t).$$

Ein Einsetzen des Ansatzes ergibt schließlich

$$C(t) = \int_{t_0}^t \sin(\tau) \cdot \exp(\tau - t_0) d\tau.$$

□

Fortsetzung des Beispiels

Nach der vorherigen Tabelle suchen wir eine **spezielle** Lösung der Form

$$y_p(t) = C \sin(t - \gamma).$$

Einsetzen von $y_p(t)$ in die Differentialgleichung ergibt

$$C \cos(t - \gamma) + C \sin(t - \gamma) = \sin(t).$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme folgt

$$C(\cos(t) \cos(\gamma) + \sin(t) \sin(\gamma)) + C(\sin(t) \cos(\gamma) - \cos(t) \sin(\gamma)) = \sin(t).$$

Wir erhalten also

$$C \cos(t) \underbrace{(\cos(\gamma) - \sin(\gamma))}_{=0} + C \sin(t) \underbrace{(\sin(\gamma) + \cos(\gamma))}_{1/C} = \sin(t).$$

Daraus folgt

$$\gamma = \pi/4 \quad \text{und} \quad C = 1/\sqrt{2}.$$

□

Typ D: Bernoullische Differentialgleichungen

Bernoullische Differentialgleichungen sind von der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)(y(t))^\alpha = 0 \quad \text{mit } \alpha \neq 0, 1$$

Sie lassen sich mit der Substitution

$$u(t) := (y(t))^{1-\alpha}$$

stets auf lineare Differentialgleichungen zurückführen:

$$u'(t) + (1 - \alpha)a(t)u(t) = (\alpha - 1)b(t)$$

Probleme ergeben sich bei der Rücksubstitution

$$y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Zum Beispiel kann $y(t)$ (in endlicher Zeit) singulär werden. □

Beispiel für eine Bernoullische Differentialgleichung

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t) + ty^2(t)$$

Die Substitution $u(t) = 1/y(t)$ ergibt

$$u'(t) + u(t) = -t$$

Die allgemeine Lösung $u(t)$ lautet dann

$$u(t) = \underbrace{C \cdot e^t}_{\text{allg. Lsg. homog. Glchg.}} + \underbrace{1 - t}_{\text{spez. Lsg. inhomog. Glchg.}}$$

Nach Rücksubstitution erhalten wir die allgemeine Lösung $y(t)$ in der Form

$$y(t) = \frac{1}{1 - t + C \cdot e^t} \quad \text{mit der Konstanten } C$$

Mit $y(0) = 2$ existiert die Lösung nur auf dem Intervall $[-1.678 \dots, 0.768 \dots]$.

□

Typ E: Riccatische Differentialgleichungen

Riccatische Differentialgleichungen sind von der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t)$$

Sie lassen sich nur in speziellen Fällen in geschlossener Form lösen:

Ist eine **spezielle** Lösung $y_p(t)$ bekannt, so liefert die Substitution

$$u(t) := \frac{1}{y(t) - y_p(t)}$$

beziehungsweise

$$y(t) = y_p(t) + \frac{1}{u(t)}$$

die lineare Gleichung

$$u'(t) - [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u(t) = b(t).$$

□

Beispiel für eine Riccatische Differentialgleichung

Wir betrachten die Gleichung

$$y'(t) = -2t + 3ty(t) - ty^2(t),$$

die $y_p(t) = 1$ als **spezielle** Lösung besitzt.

Die Substitution $u(t) = 1/(y(t) - 1)$ bzw. $y(t) = 1 + 1/u(t)$ liefert

$$\begin{aligned} u'(t) &= -u^2 y' = -u^2(-2t + 3ty(t) - ty^2(t)) \\ &= -u^2 \left(-2t + 3t + \frac{3t}{u} - t - \frac{2t}{u} - \frac{t}{u^2} \right) = -tu(t) + t \end{aligned}$$

Die **allgemeine** Lösung dieser linearen Gleichung ist

$$u(t) = 1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

und daher gilt

$$y(t) = 1 + \frac{1}{1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}.$$

Typ F: Exakte Differentialgleichungen

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$g(t, y(t)) + h(t, y(t)) y'(t) = 0$$

Definition: Existiert eine Funktion $\Phi(t, y)$ mit

$$\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial t} = g(t, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y} = h(t, y),$$

so nennt man die Differentialgleichung $g + hy' = 0$ **exakt**. □

Dann folgt

$$\frac{d\Phi(t, y(t))}{dt} = \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial y} y'(t) = 0$$

und die Lösungen der Gleichung sind gegeben durch

$$\Phi(t, y(t)) = C \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Integrabilitätsbedingung bei Vektorfeldern

Ein wichtiges Resultat aus der Analysis III:

Definieren wir ein **Vektorfeld** $F(t, y)$ durch

$$F(t, y) := (g(t, y), h(t, y))^T,$$

so heißt Differentialgleichung **exakt**, falls F ein **Potential** besitzt:

$$g(t, y) = \Phi_t(t, y), \quad h(t, y) = \Phi_y(t, y) \quad \Phi \in \mathcal{C}^1$$

Bemerkung: Mit einer zusätzlichen Eigenschaft des Potentials F , der **Integrabilitätsbedingung**, ist diese Voraussetzung erfüllt.

Satz: Sind die beiden Funktionen $g(t, y)$ und $h(t, y)$ stetig differenzierbar und ist der Definitionsbereich einfach zusammenhängend, so besitzt das Vektorfeld F ein Potential Φ genau dann, wenn im Definitionsbereich die Bedingung

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(t, y)$$

erfüllt ist. □

Berechnung des Potentials einer exakten DGL

Das Potential $\Phi(t, y)$ einer exakten Differentialgleichung kann mit **Kurvenintegralen** berechnet werden:

$$\Phi(t, y) = \int_{c(t, y)} F(\tau, \eta) d(\tau, \eta)$$

Dabei ist $c(t, y)$ eine \mathcal{C}^1 -Kurve, die den festen Punkt (t_0, y_0) mit dem variablen Punkt (t, y) verbindet.

Beispiel: Im Zweidimensionalen ($D = \mathbb{R}^2$) kann man den **Hakenweg**

$$(t_0, y_0) \rightarrow (t, y_0) \rightarrow (t, y)$$

wählen und erhält für das Potential die Darstellung

$$\Phi(t, y) = \int_{t_0}^t g(\tau, y_0) d\tau + \int_{y_0}^y h(t, \eta) d\eta.$$

□

Ein Beispiel für eine exakte Differentialgleichung

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(1 + 2ty + y^2) + (t^2 + 2ty)y' = 0 \quad ((t, y) \in \mathbb{R}^2)$$

Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^2 + 2ty) = \frac{\partial}{\partial y}(1 + 2ty + y^2) = 2(t + y)$$

und die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt, d.h. die Gleichung ist **exakt**.

Erster Schritt zur Berechnung des Potentials:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = g = 1 + 2ty + y^2.$$

Die Integration bezüglich t ergibt

$$\Phi(t, y) = t(1 + y^2) + t^2y + C(y)$$

Beachte: Die Integrationskonstante kann von y abhängen!

Fortsetzung des Beispiels

Nach dem ersten Schritt gilt

$$\Phi(t, y) = t(1 + y^2) + t^2y + C(y)$$

Zweiter Schritt: Die Funktion $C(y)$ kann aus der Integrabilitätsbedingung bestimmt werden.

Es muss gelten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = h = t^2 + 2ty.$$

Einsetzen des Ergebnisses aus dem ersten Schritt liefert

$$2ty + t^2 + C'(y) = t^2 + 2ty \quad \Rightarrow \quad C(y) = \text{const.}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch die implizite Gleichung

$$t(1 + y^2(t)) + t^2y(t) = C.$$

□

Die Methode des integrierenden Faktors

Gegeben sei die **nicht** exakte Differentialgleichung

$$g(t, y) + h(t, y) y' = 0$$

Wir suchen nun eine Funktion $m(t, y)$ so, dass die Gleichung

$$m(t, y)g(t, y) + m(t, y)h(t, y) y' = 0$$

eine **exakte** Differentialgleichung ist.

Bedingung: Die Integrabilitätsbedingungen müssen erfüllt sein, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \cdot h) - \frac{\partial}{\partial y}(m \cdot g) = 0$$

Daraus ergibt sich die Bedingung:

$$\left(h \frac{\partial m}{\partial t} - g \frac{\partial m}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0.$$

□

Zwei einfache Sonderfälle

Die Bedingung

$$\left(h \frac{\partial m}{\partial t} - g \frac{\partial m}{\partial y} \right) + m \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0$$

wird in den beiden folgenden Spezialfällen deutlich einfacher.

- **1. Fall:** Wir nehmen an, dass $m = m(t)$ nur von t abhängt.

$$\frac{dm}{dt} = - \underbrace{\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) / h \right]}_{\text{Bedingung: hängt nur von } t \text{ ab}} \cdot m(t)$$

- **2. Fall:** Wir nehmen an, dass $m = m(y)$ nur von y abhängt.

$$\frac{dm}{dy} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) / g \right]}_{\text{Bedingung: hängt nur von } y \text{ ab}} \cdot m(y)$$

□

Beispiel mit integrierendem Faktor

Gegeben sei die **nicht** exakte Gleichung

$$(1 - ty) + (ty - t^2)y' = 0$$

Es gilt:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) / h = \frac{y - t}{ty - t^2} = \frac{1}{t}$$

Unser Ansatz lautet

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{t} \cdot m(t) \quad \Longrightarrow \quad m(t) = \frac{1}{t}$$

Damit ist die Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{t} - y \right) + (y - t)y' = 0 \quad (t \neq 0)$$

exakt und die (implizite) Lösung ist gegeben durch

$$\Phi(t, y(t)) = \log |t| - ty(t) + \frac{1}{2}y^2(t) = \text{const.}$$

1.3 Elementare Lösungen für DGLs zweiter Ordnung

Typ A: Gegeben sei eine Gleichung zweiter Ordnung der Form

$$y''(t) = f(t, y'(t))$$

Beachte: die rechte Seite der DGL hängt nicht von $y(t)$ ab.

Setzen wir $z(t) := y'(t)$, so erhalten wir eine Gleichung **erster** Ordnung:

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

Lässt sich diese Gleichung lösen, so folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau.$$

□

Ein Beispiel zu Typ A

Die sogenannte **Kettenlinie** ist die Lösung der Gleichung

$$y''(t) = k\sqrt{1 + (y'(t))^2}$$

Die Substitution $z(t) := y'(t)$ ergibt die Gleichung erster Ordnung

$$z'(t) = k\sqrt{1 + z^2(t)}$$

Mittels Trennung der Variablen findet man

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2(t)}} = k \int dt$$

und daher $z(t) = \sinh(kt + c_1)$ mit der Integrationskonstanten c_1 .

Integration von $z(t)$ ergibt die Kettenlinie $y(t)$ in der Form

$$y(t) = \frac{1}{k} \cosh(kt + c_1) + c_2.$$

□

Typ B: Autonome DGLs zweiter Ordnung

Gegeben sei eine **autonome Gleichung zweiter Ordnung**

$$y''(t) = f(y(t), y'(t))$$

Nimmt man an, dass die Lösung auf einem Intervall **streng monoton** ist, so existiert die Umkehrabbildung $t = t(y)$ und

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y'(t(y))}$$

Die Substitution $v(y) := y'(t(y))$ ergibt die Differentialgleichung **erster Ordnung**

$$\frac{dv}{dy} = y''(t(y)) \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} f(y, v(y))$$

Ist die Lösung $v(y)$ bekannt, so erhält man $y(t)$ durch Auflösen von

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \int_{y_0}^y \frac{dy}{v(y)}.$$

□

Typ C: Betrachte den Spezialfall einer autonomen Gleichung der Form

$$y''(t) = f(y(t))$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} y'y'' = f(y)y' &\implies \frac{1}{2} (y')^2 = \int f(y) dy =: F(y) + C \\ &\implies y' = \pm \sqrt{2(F(y) + C)} \end{aligned}$$

Die Funktion $y(t)$ sei auf einem gewissen Bereich invertierbar

$$\frac{dt}{dy} = \pm \frac{1}{\sqrt{2(F(y) + C)}}$$

Dann erhält man $y(t)$ durch Auflösen von

$$t = t(y) = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2(F(y) + C)}}.$$

□

2 Theorie der Anfangswertaufgaben

Wir betrachten in diesem Abschnitt stets das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

mit der rechten Seite $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiert auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, und dem Anfangswert $\mathbf{y}_0 \in D$.

Relevante Fragen:

1. *Existiert* eine Lösung $\mathbf{y}(t)$ in einer Umgebung $|t - t_0| < \varepsilon$ der Anfangszeit?
2. Ist die Lösung, falls sie existiert, *eindeutig* bestimmt?
3. Wie weit lässt sich die Lösung in der Zeit *fortsetzen*?
4. Wie *verändert* sich die Lösung bei einer Störung der Anfangsdaten (t_0, \mathbf{y}_0) oder der rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$?

2.1 Existenz und Eindeutigkeit für Anfangswertaufgaben

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \quad y(0) = 0$$

Diese Gleichung besitzt *beliebig viele* Lösungen. Für $\alpha, \beta > 0$ sind die Lösungen

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t + \alpha)^2 & : -\infty < t \leq -\alpha \\ 0 & : -\alpha < t \leq \beta \\ \frac{1}{4}(t + \beta)^2 & : \beta < t < \infty \end{cases}$$

Man beachte die folgenden Eigenschaften der rechten Seite.

1. Die rechte Seite ist *stetig* und *beschränkt* auf $D = \mathbb{R} \times [-a, a]$, $a > 0$,
2. Die rechte Seite ist auf D *nicht* Lipschitz–stetig,
3. Die rechte Seite ist bei $y = 0$ *nicht* differenzierbar.

Der Existenzsatz von Peano

Satz (Existenzsatz von PEANO, 1890): Die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sei auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und es gelte $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

im Intervall $|t - t_0| < \varepsilon$ eine Lösung besitzt. □

Konstruktiver Beweis mittels des **Eulerschen Polygonzug-Verfahrens**:
Rekursive Berechnung einer (diskreten) Näherungslösung

$$t_{i+1} := t_i + h_i, \quad \mathbf{y}_{i+1} := \mathbf{y}_i + h_i \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i)$$

mit den Startwerten (t_0, \mathbf{y}_0) und den Schrittweiten h_i .

Näherungslösungen **konvergieren** gegen eine Lösung für $h_i \rightarrow 0$. □

Fortsetzbarkeit der lokalen Lösung

Bemerkung: Jede Lösung eines Anfangswertproblems lässt sich auf ein maximales Existenzintervall $-\infty \leq t_{\min} < t < t_{\max} \leq \infty$ fortsetzen.

Der Graph $(t, \mathbf{y}(t))$ der Lösung kommt dabei für $t \rightarrow t_{\min}$ bzw. $t \rightarrow t_{\max}$ dem Rand von D beliebig nahe, d.h. jeder Häufungspunkt von $(t, \mathbf{y}(t))$ für $t \rightarrow t_{\min}$ bzw. $t \rightarrow t_{\max}$ liegt auf dem Rand ∂D .

Beispiel: Die Lösung $y(t) = \exp(t)$ des Anfangswertproblems

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

ist auf ganz \mathbb{R} definiert. Also ist $t_{\min} = -\infty$ und $t_{\max} = \infty$.

Auf $D = \mathbb{R}^2$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_{\min}} (t, y(t)) = (-\infty, 0) \in \partial D$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} (t, y(t)) = (\infty, \infty) \in \partial D.$$

□

Weitere Beispiele zur Fortsetzbarkeit

Beispiel:

- Das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{t}{y}, \quad y(0) = r > 0, \quad D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

besitzt die Lösung $y(t) = \sqrt{r^2 - t^2}$. Dabei ist $t_{\min} = -r$, $t_{\max} = r$ und

$$\lim_{t \rightarrow t_{\min}} (t, y(t)) = (-r, 0) \in \partial D$$

- Für das Anfangswertproblem

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1, \quad D = \mathbb{R}^2$$

erhält man mittels Trennung der Variablen die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \quad -\infty = t_{\min} < t < t_{\max} = 1$$

□

Existenz und Eindeutigkeit nach Picard-Lindelöf

Satz (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von PICARD-LINDELÖF):

Die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sei stetig auf dem Quader

$$Q := \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq a \wedge \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_\infty \leq b\}$$

Weiterhin gebe es Konstanten $M, L > 0$ mit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| &\leq M \quad \forall (t, \mathbf{y}) \in Q \\ \|\mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| &\leq L \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\| \quad \forall (t, \hat{\mathbf{y}}), (t, \mathbf{y}) \in Q \\ &\text{(Lipschitz-Bedingung)} \end{aligned}$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{y}(t)$, die mindestens im Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ mit

$$\varepsilon := \min \left(a, \frac{b}{M} \right)$$

definiert ist.

□

Beweisidee zum Satz von Picard–Lindelöf

Durch Integration der Differentialgleichung folgt

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau)) \, d\tau$$

Lösung dieser Fixpunktgleichung mit Hilfe einer *Fixpunktiteration*:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(0)}(t) &= \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}^{(k+1)}(t) &= \mathbf{y}^{(k)}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}^{(k)}(\tau)) \, d\tau \end{aligned}$$

Die Iteration liefert in jedem Schritt eine genauere Näherungslösung:

Verfahren der sukzessiven Approximation

Beweis läuft damit analog zum Beweis des *Banachschen Fixpunktsatzes* (Analysis II). □

Lipschitz-Bedingung und globale Existenz

- Erfüllt die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n$ die Lipschitz-Bedingung

$$\|\mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|,$$

so besitzt das Anfangswertproblem mit $t_0 \in [t_1, t_2]$ eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz $[t_1, t_2]$ erklärt ist.

Man nennt dies *globale Existenz*.

- Ein lineares Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t)$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

mit stetigen Funktionen $\mathbf{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{(n,n)}$, $\mathbf{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz \mathbb{R} definiert ist.

- Ist $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf dem Quader Q eine \mathcal{C}^1 -Funktion, so erfüllt $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ dort die Lipschitz-Bedingung. □

Beispiel-Verfahren der sukzessiven Approximation

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Dann gilt mit $y^{(0)}(t) = 1$:

$$y^{(1)}(t) = y^{(0)}(t) + \int_0^t y^{(0)}(\tau) d\tau = 1 + t$$

Per *Induktion* beweist man die Formel

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} t^j$$

Für $k \rightarrow \infty$ folgt demnach

$$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j = \exp(t)$$

2.2 Abhängigkeit von Parametern und Stabilität

Wir betrachten erneut die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

mit einer rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, die auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar sei.

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert dann für $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$ eine *eindeutig bestimmte lokale Lösung* $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, die wir in D maximal fortsetzen können.

Frage: Was passiert mit dieser Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, wenn man den Startwert (t_0, \mathbf{y}_0) ein wenig verschiebt? □

Das Lemma von Gronwall

Satz (Lemma von Gronwall): *Gilt für eine auf $|t - t_0| \leq \varepsilon$ stetige Funktion $r(t)$ eine Abschätzung der Form*

$$r(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \quad \text{mit } \alpha \geq 0 \text{ und } \beta > 0,$$

so gilt für alle $|t - t_0| \leq \varepsilon$ die Abschätzung

$$r(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}.$$

Beweis: Wir definieren für $t \geq t_0$

$$u(t) := e^{-\beta t} \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau$$

Damit ergibt sich für die Ableitung von $u(t)$ die Beziehung

$$u'(t) = -\beta u(t) + e^{-\beta t} r(t).$$

Fortsetzung des Beweises

Aus der Voraussetzung

$$r(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau \quad \text{mit } \alpha \geq 0 \text{ und } \beta > 0,$$

erhalten wir unter Verwendung der Definition von $u(t)$ gerade

$$e^{-\beta t} r(t) \leq e^{-\beta t} \alpha + \beta u(t)$$

und daher folgt

$$u'(t) = -\beta u(t) + e^{-\beta t} r(t) \leq \alpha e^{-\beta t}$$

Wir schreiben diese Ungleichung als

$$\alpha e^{-\beta t} - u'(t) \geq 0$$

und integrieren von t_0 bis t .

Weitere Fortsetzung des Beweises

Integration von

$$u'(t) \leq \alpha e^{-\beta t}$$

über $[t_0, t]$ ergibt mit $u(t_0) = 0$

$$u(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t})$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} r(t) &\leq \alpha + \beta e^{-\beta t} u(t) \\ &\leq \alpha + \alpha e^{\beta t} (e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t}) \\ &= \alpha e^{\beta(t-t_0)} \end{aligned}$$

Dies ergibt für $t \geq t_0$ die gewünschte Abschätzung.

Für $t < t_0$ folgt die Aussage mit einer Transformation durch Spiegelung,

$$\tilde{r}(t) := r(2t_0 - t)$$

Direkte Folgerung aus dem Gronwall-Lemma

Satz: Für Anfangswerte $\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ seien die Lösungen $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ und $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)$ auf dem Intervall $|t - t_0| \leq \varepsilon$ definiert. Weiterhin sei $L > 0$ eine Lipschitz-Konstante der rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf einem Quader $Q = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \tilde{Q}$.

Dann gilt für $|t - t_0| \leq \varepsilon$ die Abschätzung

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \cdot \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|.$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus dem Lemma von Gronwall.

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0)) d\tau$$

Mittels Dreiecksungleichung erhalten wir damit die gewünschte Form

$$\underbrace{\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)\|}_{r(t)} \leq \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\| + L \cdot \int_{t_0}^t \|\mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{z}_0)\| d\tau.$$

Bemerkungen zum vorigen Satz

- Der Satz besagt, dass die Lösung einer Anfangswertaufgabe *Lipschitz-stetig* von den Anfangswerten $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ abhängt.
- Für eine lineare Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = L\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{mit } L > 0$$

gilt in der obigen Abschätzung für $t \geq t_0$ stets *Gleichheit*:

$$|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0|$$

Für $t < t_0$ wird der Fehler allerdings erheblich überschätzt, denn es gilt

$$|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0| \rightarrow 0$$

für $t \rightarrow -\infty$.

□

Eine Verallgemeinerung des vorigen Satzes

Satz: Sind $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$, $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ stetig differenzierbar auf einem Quader Q mit

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{y})\| \leq \delta$$

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{y})\| \leq M$$

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{y}})\| \leq L\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|$$

so gilt für die beiden Lösung $\mathbf{y}(t)$ und $\mathbf{z}(t)$ der Anfangswertprobleme

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{z}(t_1) = \mathbf{z}_0$$

mit $(t_0, \mathbf{y}_0), (t_1, \mathbf{z}_0) \in Q^0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)\| &\leq \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\| e^{L|t-t_0|} + M|t_1 - t_0| e^{L|t-t_0|} \\ &\quad + \frac{\delta}{L} \left(e^{L|t-t_0|} - 1 \right). \end{aligned}$$

□

Parameterabhängige Anfangswertprobleme

Wir betrachten als Anwendung die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \lambda) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Beachte: Die rechte Seite hängt bei von einem *Parameter* $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ab.

Dieses Problem kann auf den letzten Fall zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)), & \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}'(t) &= 0, & \mathbf{z}(t_0) &= \lambda \end{aligned}$$

Setzen wir $\mathbf{w}(t) = (\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t))^T$, so gilt mit

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{w}(t)) = (\mathbf{f}(t, \mathbf{w}(t)), 0)^T$$

und $\mathbf{w}_0 = (\mathbf{y}_0, \lambda)^T$, $\tilde{\mathbf{w}}_0 = (\mathbf{y}_0, \tilde{\lambda})^T$ die Abschätzung

$$\|\mathbf{w}(t; t_0, \mathbf{w}_0) - \mathbf{w}(t; t_0, \tilde{\mathbf{w}}_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \cdot |\lambda - \tilde{\lambda}|.$$

Beschreibung der Abhängigkeit von (t_0, \mathbf{y}_0)

Satz: Die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sei eine C^1 -Funktion auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\bar{\mathbf{y}}(t)$ sei eine auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ erklärte Lösung der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$. Dann gilt:

(1) Es gibt einen Streifen um $\bar{\mathbf{y}}(t)$

$$S_\alpha := \{(t, \mathbf{y})^T : t \in I \wedge \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}(t)\| \leq \alpha\} \subset D \quad \text{mit } \alpha > 0,$$

so dass die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ des Anfangswertproblems für alle $(t_0, \mathbf{y}_0) \in S_\alpha$ auf ganz I erklärt ist. Zusätzlich ist die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ auf $I \times S_\alpha$ eine C^1 -Funktion bezüglich aller Variablen.

(2) Die Variationen

$$\mathbf{Y}(t) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \mathbf{w}(t) := \frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^n$$

sind die Lösungen der linearen Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'(t) &= \mathbf{f}_y(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \cdot \mathbf{Y}(t), & \mathbf{Y}(t_0) &= \mathbf{I}_n \\ \mathbf{w}'(t) &= \mathbf{f}_y(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \cdot \mathbf{w}(t), & \mathbf{w}(t_0) &= -\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0). \end{aligned}$$

3 Lineare Differentialgleichungen

3.1 Systeme erster Ordnung

Gegeben sei das *lineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung*

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t)$$

mit den stetigen Funktionen $\mathbf{A} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{h} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Das zugehörige Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

besitzt eine *eindeutig bestimmte* Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, die für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert.

Satz: Die allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{y}_p(t)}_{\text{spez. Lsg. inhomogen}} + \underbrace{\mathbf{y}_h(t)}_{\text{allg. Lsg. homogen}}$$

Das homogene Differentialgleichungssystem

Wir betrachten die *homogene Anfangswertaufgabe*

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ ist ein Element des *Vektorraums* \mathbb{R}^n .

Es existiert eine *Basisdarstellung* der Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$:

Sei $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ eine *Basis* des \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) \mathbf{v}^k.$$

Mit dem Anfangswert $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ gilt weiterhin

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t_0) \mathbf{v}^k.$$

□

Die Fundamentalmatrix

Betrachten wir die n Anfangswertprobleme ($k = 1, \dots, n$)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{y}^k(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{y}^k(t) \\ \mathbf{y}^k(t_0) &= \mathbf{v}^k \end{cases}$$

und definieren damit die *Fundamentalmatrix* (bzw. das *Fundamentalsystem*)

$$\mathbf{Y}(t) := (\mathbf{y}^1(t), \dots, \mathbf{y}^n(t)) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

so gilt das folgende Resultat.

Satz: Die Matrix $\mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ sei ein Fundamentalsystem. Dann gilt:

a) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}^k(t) \quad \text{mit } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n.$$

b) Die Fundamentalmatrix ist für alle $t \in \mathbb{R}$ regulär. □

Beweis des Satzes

Da die Vektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ eine Basis bilden, ist die Matrix $\mathbf{Y}(t_0)$ *regulär*, denn

$$\mathbf{Y}(t_0) = (\mathbf{y}^1(t_0), \dots, \mathbf{y}^n(t_0)) = (\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n)$$

Setzen wir

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}^k(t),$$

so berechnet man

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \sum_{k=1}^n c_k \frac{d}{dt} \mathbf{y}^k(t) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{A}(t) \mathbf{y}^k(t) \\ &= \mathbf{A}(t) \left(\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}^k(t) \right) = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}$ eine *Lösung* des Differentialgleichungssystems.

Fortsetzung des Beweises

Sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine beliebige Lösung des Differentialgleichungssystems. Setzen wir

$$\mathbf{c}^* := \mathbf{Y}(t_0)^{-1} \mathbf{y}^*(t_0),$$

so sind

$$\mathbf{y}^*(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}^*$$

beide Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^*(t_0) \end{cases}$$

Da die Lösung aber eindeutig ist, folgt $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{y}(t)$. Also gilt

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}^*$$

Damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt.

Weitere Fortsetzung des Beweises

Wir zeigen nun, dass $\mathbf{Y}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ regulär ist.

Für ein festes $t_1 \neq t_0$ zeigen wir

Für alle $\mathbf{y}^1 \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{Y}(t_1) \mathbf{c} = \mathbf{y}^1$,

denn dann ist $\mathbf{Y}(t_1)$ *regulär*. Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}^1, \end{cases}$$

so existiert stets eine eindeutige Lösung, die nach Teil 1) in der Form

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}$$

mit einem $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ geschrieben werden kann. Für $t = t_1$ gilt dann

$$\mathbf{Y}(t_1) \mathbf{c} = \mathbf{y}^1.$$



Die Wronski–Determinante

Definition: Die C^1 –Funktion

$$W(t) = \det(\mathbf{Y}(t))$$

nennt man **Wronski–Determinante** zum Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t).$$

Bemerkung: Die Wronski–Determinante $W(t)$ ist Lösung der skalaren linearen Differentialgleichung

$$W'(t) = \text{Spur}(\mathbf{A}(t)) \cdot W(t).$$

Mittels Trennung der Variablen erhält man die Lösungsdarstellung

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(\mathbf{A}(\tau)) \, d\tau\right).$$

□

Das inhomogene Differentialgleichungssystem

Wir betrachten jetzt die *inhomogene Anfangswertaufgabe*

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung verwenden wir wie bei einer skalaren Gleichung eine *Variation der Konstanten*

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$$

Setzt man diesen Ansatz in die inhomogene Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{Y}'(t) \mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}'(t), \\ &= \mathbf{A}(t) \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}'(t), \\ &= \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}'(t). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

Der verwendete Ansatz $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \mathbf{c}(t)$ löst die inhomogene Gleichung, falls

$$\mathbf{Y}(t) \mathbf{c}'(t) = \mathbf{h}(t)$$

Da $\mathbf{Y}(t)$ regulär ist, können wir dies auch in der Form $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t) \mathbf{h}(t)$ schreiben. Durch *Integration* erhält man

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau) \mathbf{h}(\tau) d\tau.$$

Satz: Die allgemeine Lösung der *inhomogenen Gleichung* lautet

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \left(\mathbf{c}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{Y}^{-1}(\tau) \mathbf{h}(\tau) d\tau \right).$$

Insbesondere gilt mit $\mathbf{c}_0 := \mathbf{Y}(t_0)^{-1} \mathbf{y}_0$ gerade $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. □

3.2 Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Fundamentalsysteme können explizit berechnet werden, falls

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$$

Die Matrix \mathbf{A} ist dann unabhängig von t und besitzt *konstante Koeffizienten*.

Ansatz: Wir suchen eine Lösung in der Form

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C} \text{ und } \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n.$$

Setzen wir dies in die Gleichung ein, ergibt sich

$$\mathbf{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{y}(t) \stackrel{!}{=} \mathbf{A} \mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{A} \mathbf{v}$$

Somit ist $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ genau dann eine Lösung, falls \mathbf{v} ein *Eigenvektor* von \mathbf{A} zum *Eigenwert* λ ist, denn es gilt die Äquivalanz

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

□

Fundamentalsysteme bei konstanten Koeffizienten I

Ist \mathbf{v} ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , so besitzt die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{v} \end{cases}$$

die Lösung $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda(t-t_0)} \mathbf{v}$.

Fall 1: Alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von \mathbf{A} seien *reell* und es existiere eine *Basis aus reellen Eigenvektoren* $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$. Dann ist eine Fundamentalmatrix gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n)$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{v}^k, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

□

Komplexwertige Fundamentalsysteme

Beispiel: Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 2i, & \mathbf{v}^1 &= (1, -2i)^T \\ \lambda_2 &= 1 - 2i, & \mathbf{v}^2 &= (1, 2i)^T \end{aligned}$$

Es existiert somit eine Basis aus Eigenvektoren, aber die Eigenvektoren und Eigenwerte sind *komplexwertig* und bilden ein *komplexes Fundamentalsystem*:

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2).$$

Wir suchen jedoch *reellwertige* Lösungen! □

Fundamentalsysteme bei konstanten Koeffizienten II

Fall 2: Die Systemmatrix \mathbf{A} sei *diagonalisierbar*.

Dann existiert eine Basis des \mathbb{C}^n aus (komplexen) Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$. Die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ müssen weder reell noch einfach sein.

Ein komplexes Fundamentalsystem für \mathbb{C}^n ist gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n).$$

Die allgemeine *komplexwertige* Lösung des homogenen Systems mit konstanten *reellen* Koeffizienten lautet

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{v}^k \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{C}.$$

Bemerkung: Jede *normale* Matrix ist diagonalisierbar. Insbesondere ist jede *symmetrische* Matrix diagonalisierbar. □

Komplex- und reellwertige Fundamentalsysteme

Frage: Kann man aus einem komplexen Fundamentalsystem ein reellwertiges Fundamentalsystem konstruieren?

Idee: Falls $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein komplexer Eigenwert von \mathbf{A} ist, so ist ebenso der komplex-konjugierte Wert $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von \mathbf{A} . Dementsprechend ist $\bar{\mathbf{v}}$ ein Eigenvektor von \mathbf{A} , falls \mathbf{v} ein Eigenvektor ist.

Fazit: Nicht-reelle Eigenwerte und Eigenvektoren treten stets paarweise auf. Ersetze jedes komplexwertige Paar von Eigenvektoren

$$\mathbf{y}^1(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^2(t) = e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}}$$

durch

$$\mathbf{y}^1(t) = \operatorname{Re} (e^{\lambda t} \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (e^{\lambda t} \mathbf{v} + e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{y}^2(t) = \operatorname{Im} (e^{\lambda t} \mathbf{v}) = \frac{1}{2i} (e^{\lambda t} \mathbf{v} - e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}^n.$$

□

Ein Beispiel zu komplexen Fundamentalsystemen

Ein komplexes Fundamentalsystem zu

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}^2)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 2i, & \mathbf{v}^1 &= (1, -2i)^T \\ \lambda_2 &= 1 - 2i, & \mathbf{v}^2 &= (1, 2i)^T \end{aligned}$$

Die beiden Eigenwerte treten paarweise auf:

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \quad \mathbf{v}^2 = \bar{\mathbf{v}}^1.$$

Fortsetzung des Beispiels

Aus den beiden *komplexen* Vektoren

$$\mathbf{z}^1(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \quad \mathbf{z}^2(t) = e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

berechnet man die beiden *reellen* Vektoren

$$\mathbf{y}^1(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{z}^1(t)) \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^2(t) = \operatorname{Im}(\mathbf{z}^1(t))$$

also

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2 \sin(2t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\mathbf{y}_h(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ 2c_1 \sin(2t) - 2c_2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

die allgemeine *reelle* Lösung des Systems. □

Fundamentalsysteme bei konstanten Koeffizienten II

Fall 3: Die Systemmatrix \mathbf{A} sei *nicht* diagonalisierbar.

In diesem Fall benötigen wir die *Jordansche Normalform* von \mathbf{A} :

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$$
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_n \end{pmatrix},$$

wobei \mathbf{J}_i ein Jordan-Kästchen zum Eigenwert λ_i bezeichnet

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Fundamentalsysteme für Jordan-Kästchen

Ein System in der Form eines *Jordan-Kästchens*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

kann unter Verwendung der Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$ explizit gelöst werden

$$e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t^2/2! \\ t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t^{r-1}/(r-1)! \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t/1! \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nicht-diagonalisierbare Fundamentalsysteme

Betrachten wir die *Jordansche Normalform* der Systemmatrix \mathbf{A}

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$$

so besteht die *Transformationsmatrix* \mathbf{S} aus Eigen- und Hauptvektoren

$$\mathbf{S} = (\mathbf{v}^{11}, \dots, \mathbf{v}^{1r_1} \mid \mathbf{v}^{21}, \dots, \mathbf{v}^{2r_2} \mid \dots \mid \mathbf{v}^{m1}, \dots, \mathbf{v}^{mr_m})$$

\mathbf{v}^{j1} : Eigenvektor zum Eigenwert λ_j , $j = 1, \dots, m$

\mathbf{v}^{jk} : Hauptvektor der Stufe $(k - 1)$, $k = 2, \dots, r_j$

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}_n) \mathbf{v}^{jk} = \mathbf{v}^{j,k-1}, \quad k = 2, \dots, r_j$$

Wir setzen nun $\mathbf{z}(t) := \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y}(t)$. Dann gilt

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{y}(t) = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{z}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z}'(t) = \mathbf{J} \mathbf{z}(t)$$

Ein Fundamentalsystem für $\mathbf{z}' = \mathbf{J} \mathbf{z}$ haben wir bereits berechnet.

Nicht-diagonalisierbare Fundamentalsysteme

Eine *Rücktransformation* ergibt ein Fundamentalsystem für $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$.

Für ein einzelnes Jordan-Kästchen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{11}(t) &= e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^{11} \\ \mathbf{y}^{12}(t) &= e^{\lambda_1 t} \left(\frac{t}{1!} \mathbf{v}^{11} + \mathbf{v}^{12} \right) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{1r}(t) &= e^{\lambda_1 t} \left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \mathbf{v}^{11} + \dots + \frac{t}{1!} \mathbf{v}^{1,r-1} + \mathbf{v}^{1r} \right) \end{aligned}$$

Vorgehen zur Bestimmung der Lösung:

1. Bestimmung der Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren,
2. Berechnung der Lösungen nach obiger Formel,
3. Zusammenfügen dieser Einzelmatrizen zur Fundamentalmatrix.



Beispiel für ein nicht-diagonalisierbares System

Gesucht sei die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ergibt $\lambda = 1$ als dreifacher Eigenwert:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = (1 - \lambda)^3$$

Wir berechnen einen Eigenvektor für $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = 2$ gilt, ist die *geometrische Vielfachheit* $g(\lambda) = 1$.

Fortsetzung: Wir benötigen *Hauptvektoren der Stufe 1 und 2*:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch:

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} 16t \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^3(t) = e^t \begin{pmatrix} 8t^2 \\ -4t + 1 \\ 8t + 2 \end{pmatrix}$$

Damit bekommt man die allgemeine Lösung $\mathbf{y}_h = C_1 \mathbf{y}^1 + C_2 \mathbf{y}^2 + C_3 \mathbf{y}^3$ mit $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. \square

Weiteres Beispiel für nicht-diagonalisierbares System

Gesucht sei die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Erneut ist $\lambda = 1$ dreifacher Eigenwert von \mathbf{A} , aber es gilt $g(\lambda) = 2$.

Es existieren somit *zwei* linear unabhängige Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir suchen nun einen zu \mathbf{v}^1 und \mathbf{v}^2 linear unabhängigen Vektor \mathbf{v}^3 , d.h. einen *Hauptvektor der Stufe 1*.

Fortsetzung des Beispiels

Wählen wir $\mathbf{v}^{22} = (0, 0, 1)^T$, so folgt $\mathbf{v}^{21} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3)\mathbf{v}^{22} = (1, 1, 0)^T$.

Damit erhalten wir ein System von Eigen- und Hauptvektoren der Form

$$\mathbf{v}^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der *Jordanschen Normalform*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}, \quad \text{wobei } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige Fundamentalsystem lautet dann

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}^3(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit bekommt man die allgemeine Lösung $\mathbf{y}_h = C_1\mathbf{y}^1 + C_2\mathbf{y}^2 + C_3\mathbf{y}^3$ mit $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. \square

3.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gegeben sei eine *skalare lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung*:

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = h(t)$$

wobei $a_k(t)$, $k = 0, \dots, n-1$ stetige Funktionen auf \mathbb{R} seien.

Eine solche Gleichung lässt sich als *System erster Ordnung* schreiben:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix},$$

wobei

$$y_k(t) := y^{(k-1)}(t) \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n.$$

□

Homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung

Definition: Ein Funktionensystem $(y_1(t), \dots, y_n(t))$ heißt **Fundamentalsystem** der Differentialgleichung

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = h(t),$$

falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- Die Funktionen $y_k(t)$ lösen die homogene Gleichung, d.h.

$$L[y_k] = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

- Die Wronski–Determinante

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ist für mindestens ein $t_0 \in \mathbb{R}$ ungleich Null, $W(t_0) \neq 0$. □

Bemerkungen

- Ist $W(t_0) \neq 0$, so gilt auch $W(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Weiter löst $W(t)$ die Differentialgleichung $W'(t) = -a_{n-1}(t)W(t)$, und daher gilt

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a_{n-1}(\tau) d\tau\right).$$

- Ein Fundamentalsystem (y_1, \dots, y_n) läßt sich durch Lösung von n Anfangswertaufgaben ($k = 1, \dots, n$) bestimmen:

$$\begin{aligned} L[y_k] &= 0 \\ y_k^{(i)}(t_0) &= \begin{cases} 0 & : i \neq k-1 \\ 1 & : i = k-1 \end{cases} \quad (i = 0, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$y(t) = y_p(t) + \sum_{k=1}^n c_k y_k(t),$$

wobei $y_p(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist. □

Das Reduktionsverfahren

Sei $u(t) \neq 0$ eine Lösung der homogenen Gleichung $L[y] = 0$.

Produktansatz: Wir suchen eine weitere (linear unabhängige) Lösung der Form

$$y(t) = u(t) \cdot z(t)$$

Die ersten Ableitungen lauten:

$$y'(t) = u'(t)z(t) + u(t)z'(t)$$

$$y''(t) = u''(t)z(t) + 2u'(t)z'(t) + u(t)z''(t)$$

Allgemein gilt dann:

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t) z^{(j)}(t).$$

Fortsetzung des Reduktionsverfahrens

Einsetzen in $L[y] = 0$ ergibt:

$$\begin{aligned}
 L[y] &= \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t) z^{(j)}(t) \\
 &= \underbrace{\left[\sum_{k=0}^n a_k \binom{k}{0} u^{(k)}(t) \right]}_{=0} z + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t) z^{(j)}(t) \\
 &= \sum_{j=1}^n b_j z^{(j)}(t)
 \end{aligned}$$

Setzt man $w(t) := z'(t)$, so ergibt sich eine homogene Differentialgleichung der Ordnung $n - 1$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} w^{(j)}(t) = 0.$$

Weitere Fortsetzung des Reduktionsverfahrens

Ist w_1, \dots, w_{n-1} ein Fundamentalsystem von

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} w^{(j)}(t) = 0,$$

so setzen wir

$$z_k(t) = \int_{t_0}^t w_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, \dots, n-1$$

Mit dem ursprünglichen Ansatz ist dann die Funktionenmenge

$$(u, z_1 \cdot u, \dots, z_{n-1} \cdot u)$$

ein Fundamentalsystem der Ausgangsgleichung, also $L[y] = 0$ mit

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = 0.$$

□

Ein Beispiel zum Reduktionsverfahren

Die Differentialgleichung $y'' + ty' + y = 0$ besitzt die Lösung

$$u(t) = e^{-t^2/2}$$

Der Produktansatz $y = u \cdot z$ liefert:

$$\begin{aligned}y' &= u' \cdot z + u \cdot z' \\y'' &= u'' \cdot z + 2u' \cdot z' + u \cdot z''\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\begin{aligned}y'' + ty' + y &= u''z + 2u'z' + uz'' + t(u'z + uz') + uz \\ &= 2u'z' + uz'' + tuz'\end{aligned}$$

Wir setzen $w = z'$ und erhalten für w die Gleichung erster Ordnung

$$uw' + (2u' + tu)w = 0 \quad \implies \quad w' = -\frac{2u' + tu}{u} w.$$

Fortsetzung des Beispiels

Wir berechnen:

$$\frac{2u' + tu}{u} = \frac{-2te^{-t^2/2} + te^{-t^2/2}}{e^{-t^2/2}} \implies w' = tw$$

Damit gilt:

$$w(t) = e^{t^2/2} \implies z(t) = \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

Wir erhalten damit das Fundamentalsystem

$$y_1(t) = u(t) = e^{-t^2/2} \quad y_2(t) = e^{-t^2/2} \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist somit

$$y_h(t) = c_1 e^{-t^2/2} + c_2 e^{-t^2/2} \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau.$$

□

Inhomogene Differentialgleichungen höherer Ordnung

Ist das Funktionensystem (y_1, \dots, y_n) ein Fundamentalsystem, so ist die Matrix

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \dots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix des zugehörigen Systems erster Ordnung. Die Methode der *Variation der Konstanten* ergibt dann das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \dots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_{n-1} \\ c'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

□

Die Methode der Greenschen Funktion

Gegeben sei die inhomogene Gleichung mit *konstanten Koeffizienten*

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = h(t)$$

Satz: Sei $w(t)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$L[w] = 0, \quad w^{(k)}(t_0) = \begin{cases} 0 & : k = 0, \dots, n-2 \\ 1 & : k = n-1 \end{cases}$$

Dann ist eine spezielle Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$y_p(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) h(\tau) d\tau$$

$$G(t, \tau) = w(t - \tau + t_0) \quad (\text{Greensche Funktion}).$$

□

Lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei die homogene Gleichung

$$L[y] := a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = h(t)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n-1$ und $a_n = 1$.

Zur Berechnung eines Fundamentalsystems verwenden wir den Ansatz

$$y(t) = e^{\lambda t}.$$

Daraus folgt

$$L[y] = \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t}.$$

Dieser Ansatz liefert eine Lösung, falls λ eine Nullstelle der *charakteristischen Gleichung*

$$p(\lambda) := \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = 0$$

ist. □

Charakteristische Gleichung & Fundamentalsystem

Satz:

(1) Ist λ_k eine r_k -fache **reelle** Nullstelle von $p(\lambda)$, so existiert die Lösung der homogenen Gleichung

$$\begin{aligned}y_{k1}(t) &= e^{\lambda_k t} \\y_{k2}(t) &= t \cdot e^{\lambda_k t} \\&\vdots \\y_{k,r_k}(t) &= t^{r_k-1} \cdot e^{\lambda_k t}\end{aligned}$$

(2) Ist λ_k eine r_k -fache **komplexe** Nullstelle, $\lambda_k \notin \mathbb{R}$, so sind die reellen Lösungen mit $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ gegeben durch

$$y_{kj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t) \quad y_{lj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t)$$

und $j = 1, \dots, r_k$.

(3) Die Lösungen aus (1),(2) bilden ein Fundamentalsystem von $L[y] = 0$. \square

Zwei Beispiele

Beispiel 1: Betrachte die homogene Gleichung vierter Ordnung

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$. Somit ist

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos t & y_3(t) &= t \cdot \cos t \\ y_2(t) &= \sin t & y_4(t) &= t \cdot \sin t \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem der vorgelegten Differentialgleichung.

Beispiel 2: Die homogene Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$ besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 1$. Somit ist $y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$ allgemeine Lösung dieser Gleichung. \square

Ein Beispiel für eine inhomogene Gleichung

Betrachte die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$$

Bei der *Variation der Konstanten* verwenden wir den Ansatz

$$y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t.$$

Gelöst werden muss dann das System

$$\begin{aligned}c_1'e^t + c_2'te^t &= 0 \\c_1'e^t + c_2'(1+t)e^t &= \frac{e^t}{t^2}.\end{aligned}$$

Man berechnet direkt $c_1(t) = -\log|t|$, $c_2 = -1/t$. Daher ist

$$y_p(t) = -\left(\log|t| + 1\right)e^t$$

eine spezielle Lösung der vorgelegten Gleichung. □

Noch einmal das gleiche Beispiel

Wir betrachten erneut die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2},$$

verwenden aber nun die *Methode der Greenschen Funktion*. Die Lösung von

$$w'' - 2w' + w = 0, \quad w(1) = 0, \quad w'(1) = 1$$

ist gegeben durch $w(t) = (t - 1)e^{t-1}$. Somit bekommen wir die Greensche Funktion

$$G(t, \tau) = w(t - \tau + 1) = (t - \tau)e^{t-\tau}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_1^t (t - \tau)e^{t-\tau} \frac{e^\tau}{\tau^2} d\tau \\ &= e^t(-1 + t - \log|t|). \end{aligned}$$

□

Ansatz bei speziellen Inhomogenitäten

Bei Inhomogenitäten der Form

$$h(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^m \beta_j t^j$$

kann man spezielle Ansätze zur Bestimmung von $y_p(t)$ verwenden:

- Ist μ keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung $p(\lambda)$, so ist eine *spezielle Lösung* mit den freien Parametern γ_j

$$y_p(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^m \gamma_j t^j$$

- Ist μ eine r -fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so ist eine *spezielle Lösung*

$$y_p(t) = e^{\mu t} t^r \sum_{j=0}^m \gamma_j t^j.$$

□

Ein Beispiel mit spezieller Inhomogenität

Betrachte die Gleichung

$$y'' - y = te^t.$$

Deren zugehörige charakteristische Gleichung $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ besitzt $\mu = 1$ als *einfache* Nullstelle. Die führt uns zu dem Ansatz

$$y_p(t) = e^t(\gamma_0 t + \gamma_1 t^2).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + (\gamma_0 + 4\gamma_1)t + \gamma_1 t^2)e^t - (\gamma_0 t + \gamma_1 t^2)e^t = te^t.$$

Umsortieren liefert

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + 4\gamma_1 t)e^t = te^t.$$

Daraus folgt $\gamma_0 = -\gamma_1 = -1/4$ und

$$y_p(t) = \frac{t}{4}(t - 1)e^t.$$

□

Das Superpositionsprinzip

Gegeben sei eine inhomogene DGL der Form

$$L[y] = h(t) = h_1(t) + h_2(t). \quad (1)$$

Sind $y_1(t)$ und $y_2(t)$ spezielle Lösungen von $L[y] = h_1(t)$ und $L[y] = h_2(t)$, so ist $y_p(t) := y_1(t) + y_2(t)$ eine spezielle Lösung von (1).

Komplexe Differentialgleichungen

Ist $h(t)$ der Real- oder Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion $w(t)$,

$$h(t) = \operatorname{Re}(w(t)) \quad \text{bzw.} \quad h(t) = \operatorname{Im}(w(t))$$

und ist $z(t)$ eine *komplexe* Lösung von $L[z] = w$, so ist

$$y(t) = \operatorname{Re}(z(t)) \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \operatorname{Im}(z(t))$$

eine *reelle* Lösung der Differentialgleichung $L[y] = h(t)$. □

Beispiel zum Superpositionsprinzip

Ein spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} (\cos t + \sin(2t))$$

ist gegeben durch

$$y_p(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{4} t \cos(2t) \right)$$

- Beim Superpositionsprinzip betrachtet man die beiden Gleichungen

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \cos t$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin(2t)$$

- Beide Gleichungen löst man durch Übergang auf komplexe Zahlen:

$$z'' + 2z' + 5z = e^{(-1+i)t} \quad \text{bzw.} \quad e^{(-1+2i)t}.$$



3.4 Die Laplace-Transformation

Definition: Sei $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine reell- oder komplexwertige Funktion auf \mathbb{R} . Dann ist die **Laplace-Transformierte** von F gegeben durch die Integraltransformation

$$f(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad \text{für } s \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Frage: Für welche Funktionen $F(t)$ existiert das uneigentliche Integral?

Schreiben wir die komplexe Zahl s als

$$s = \sigma + i\omega$$

so folgt

$$f(s) := \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \left(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \right) F(t) dt.$$

Das Wachstumsverhalten von F ist entscheidend.

Satz: Ist F auf $[0, \infty)$ lokal integrierbar und erfüllt F für Konstanten M und σ_0 eine Ungleichung der Form

$$|F(t)| \leq Me^{\sigma_0 t} \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

so existiert die **Laplace-Transformierte** $f(s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit

$$\operatorname{Re}(s) > \sigma_0.$$

Beweisidee: Setzen wir $s = \sigma + i\omega$, so gilt

$$|e^{-st}F(t)| = e^{-\sigma t}|F(t)| \leq Me^{-(\sigma - \sigma_0)t}$$

Aus $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ folgt also

$$(\sigma - \sigma_0)t > 0 \quad \text{für alle } t > 0$$

und damit die Konvergenz des uneigentlichen Integrals. □

Notationen und Bezeichnungen.

Sei $F(t)$ eine reell- oder komplexwertige Funktion, deren Laplace-Transformierte $f(s)$ existiere. Dann verwenden wir die Notation

$$f = \mathcal{L}[F].$$

- Das **Doetsch-Symbol** $\circ \longrightarrow \bullet$ wird in diesem Fall wie folgt verwendet.

$$F \circ \longrightarrow \bullet f \quad \text{oder} \quad f \bullet \longrightarrow \circ F$$

- Eine Beziehung

$$f = \mathcal{L}[F] \quad \text{bzw.} \quad F \circ \longrightarrow \bullet f$$

nennt man eine **Korrespondenz**, die Zuordnung $F \longrightarrow f$ heißt **Laplace-Transformation**.

- Die Laplace-Transformation ist *linear*, d.h.

$$\mathcal{L}[\alpha F + \beta G] = \alpha \mathcal{L}[F] + \beta \mathcal{L}[G].$$

Ein Beispiel zur Laplace-Transformation.

Wir betrachten die **Heaviside-Funktion**

$$H(t) := \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ 1 & : t \geq 0 \end{cases}$$

Die Laplace-Transformierte von H berechnen wir wie folgt.

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Dies ergibt die **Korrespondenz**

$$1 \circ \text{---} \bullet \frac{1}{s}.$$

Noch ein Beispiel zur Laplace-Transformation.

Die Laplace-Transformierte von

$$F(t) = t^n \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

ist gegeben durch

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt.$$

Das Integral existiert für $\operatorname{Re}(s) > 0$. Mit partieller Integration folgt

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt$$

Eine wiederholte Anwendung der partiellen Integration ergibt die *Korrespondenz*

$$t^n \circ \bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Ein Beispiel für eine komplexwertige Funktion.

Gegeben sei die komplexwertige Funktion

$$F(t) = e^{at} \quad \text{für } a = \alpha + i\beta.$$

Für die Laplace-Transformierte von F bekommt man

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

für $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a) = \alpha$.

Damit erhalten wir die *Korrespondenz*

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}.$$

Ein Beispiel für eine trigonometrische Funktion.

Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \sin(\omega_0 t) \quad \text{für } \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

Zunächst gilt

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}),$$

und wegen

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$$

erhalten wir die *Korrespondenz*

$$\sin(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2},$$

denn

$$\frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \circ \bullet \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right).$$

Ein Beispiel für eine trigonometrische Funktion.

Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \text{für } \omega_0 \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}),$$

und wegen

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$$

erhalten wir die *Korrespondenz*

$$\cos(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega_0^2},$$

denn

$$\frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \circ \bullet \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega} \right).$$

Korrespondenztabelle.

$F(t)$	$f(s)$	σ_0	Bemerkung
1	$\frac{1}{s}$	0	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0	$n = 1, 2, \dots$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re}(a)$	a komplex
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	0	ω_0 reell
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	0	ω_0 reell

Grundregeln der Laplace-Transformation.

- **Additionssatz:** Für beliebige komplexe Konstanten a und b gilt

$$aF(t) + bG(t) \circ \bullet af(s) + bg(s)$$

- **Ähnlichkeitssatz:** Für jede reelle Konstante $\alpha > 0$ gilt

$$F(\alpha t) \circ \bullet \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Beispiel: Aus

$$e^t \circ \bullet \frac{1}{s-1}$$

folgt

$$e^{\alpha t} \circ \bullet \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\frac{s}{\alpha} - 1} = \frac{1}{s - \alpha}.$$

Weitere Grundregeln der Laplace-Transformation.

- **Differentiationssatz:** Sei $F(t)$ für $t > 0$ differenzierbar, und es existiere die Laplace-Transformierte von F' . Dann gilt

$$F'(t) \circ \bullet sf(s) - F(0)$$

Ist F in Null unstetig, so ist $F(0)$ der rechtsseitige Grenzwert

$$F(0) = \lim_{t \searrow 0} F(t).$$

Im Allgemeinen gilt für höhere Ableitungen ($n \geq 2$) die Formel

$$F^{(n)}(t) \circ \bullet s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - F^{(n-1)}(0).$$

- **Multiplikationssatz:** Es gilt

$$-tF(t) \circ \bullet f'(s) \quad \text{bzw.} \quad tF(t) \circ \bullet -f'(s)$$

und allgemein

$$(-t)^n F(t) \circ \bullet f^{(n)}(s) \quad \text{bzw.} \quad t^n F(t) \circ \bullet (-1)^n f^{(n)}(s).$$

Weitere Grundregeln der Laplace-Transformation.

- *Integrationsatz*: Es gilt die Korrespondenz

$$\int_0^t F(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{f(s)}{s}.$$

- *Divisionssatz*: Die Funktion besitze den Wachstumskoeffizienten σ_0 , und es existiere die Laplace-Transformierte von

$$G(t) := \frac{F(t)}{t}.$$

Dann gilt für $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ die Korrespondenz

$$G(t) = \frac{F(t)}{t} \circ \bullet \int_s^\infty f(u) du.$$

Weitere Grundregeln der Laplace-Transformation.

- *Verschiebungssatz*: Für alle $T_0 > 0$ gilt die Korrespondenz

$$F(t - T_0) \circ \bullet e^{-sT_0} f(s).$$

- *Dämpfungssatz*: Für $a \in \mathbb{C}$ gilt die Korrespondenz

$$e^{at} F(t) \circ \bullet f(s - a).$$

Beispiel: Aus

$$\sin(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

folgt die Korrespondenz

$$e^{at} \sin(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{\omega_0}{(s - a)^2 + \omega_0^2}.$$

Laplace-Transformationen und lineare DGLs.

Nach dem Differentiationssatz gilt die Korrespondenz

$$F'(t) \circ \longrightarrow \bullet \quad sf(s) - F(0).$$

Idee: Gegeben sei die Anfangswertaufgabe (mit *linearer* DGL)

$$Y'(t) = Y(t), \quad Y(0) = 1.$$

Für die Laplace-Transformierte $y(s)$ von $Y(t)$ ergibt sich dann

$$sy(s) - 1 = y(s) \quad \Longrightarrow \quad y(s) = \frac{1}{s-1}$$

und aus der Korrespondenztabelle erhalten wir die Lösung

$$Y(t) = e^t.$$

Fazit:

Lineare DGLs führen zu **algebraischen Gleichungen** der Laplace-Transformierten.

Beispiel.

Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems

$$Y''(t) + \alpha^2 Y(t) = \sin(\alpha t) \quad \text{für } \alpha > 0.$$

mit $Y(0) = Y'(0) = 0$.

Mit der Korrespondenztabelle erhalten wir

$$s^2 y(s) + \alpha^2 y(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2},$$

und es gilt

$$y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2}.$$

Wir könnten nun eine *Partialbruchzerlegung* anwenden.

Wir verwenden hier allerdings die Beziehung

$$y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2} = -\frac{1}{2s} \frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}.$$

Fortsetzung des Beispiels.

Mit

$$F(t) = \sin(\alpha t) \circ \bullet \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} = f(s)$$

und dem *Multiplikationssatz*

$$tF(t) \circ \bullet -f'(s) = \frac{2\alpha s}{(s^2 + \alpha^2)^2} = 2s y(s) = -\frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

folgt die Korrespondenz

$$-\frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \bullet \circ t \sin(\alpha t).$$

Mit Anwendung des *Integrationssatzes* folgt daraus die Korrespondenz

$$-\frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \bullet \circ \int_0^t \tau \sin(\alpha \tau) d\tau = \frac{1}{\alpha^2} \left(-\alpha t \cos(\alpha t) + \sin(\alpha t) \right).$$

Somit ist die Lösung bestimmt mit

$$Y(t) = \frac{2}{\alpha^2} \left(-\alpha t \cos(\alpha t) + \sin(\alpha t) \right).$$

Ein weiteres Beispiel.

Wir betrachten die Anfangswertaufgabe

$$Y'' + Y' + 4Z = \sin(\omega t)$$

$$Y' + Z' + Z = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $Y(0) = -\frac{1}{3}$, $Y'(0) = 0$ und $Z(0) = 0$.

Anwendung der Laplace-Transformation ergibt

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + sy(s) - Y(0) + 4z(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$sy(s) - Y(0) + sz(s) - Z(0) + z(s) = 0$$

Mit den Anfangsbedingungen erhalten wir

$$s(s+1)y(s) + 4z(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{s+1}{3}$$

$$sy(s) + (s+1)z(s) = \frac{1}{3}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Die Funktionen $(y(s), z(s))$ erfüllen ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix

$$A = A(s) = \begin{pmatrix} s(s+1) & 4 \\ s & s+1 \end{pmatrix},$$

und die Lösung lautet

$$y(s) = \frac{3\omega(s+1) - [(s+1)^2 - 4](s^2 + \omega^2)}{3(s^2 + \omega^2)s[(s+1)^2 - 4]}$$

$$z(s) = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)[(s+1)^2 - 4]}$$

Nächste Schritte:

- Anwendung der *Partialbruchzerlegung*
- Rücktransformation aus der *Korrespondenztabelle*

Komplettierung des Beispiels.

Nach *längeren* Umformungen ergibt sich

$$y(s) = -\frac{\omega^2 - 3}{\omega(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \cos(\omega t) - \frac{\omega^2 + 5}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \sin(\omega t) \\ + \frac{\omega}{2(\omega^2 + 1)} e^t - \frac{\omega}{6(\omega^2 + 9)} e^{-3t} - \frac{\omega + 1}{3\omega}$$

$$z(s) = \frac{2\omega}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \cos(\omega t) + \frac{\omega^2 + 3}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \sin(\omega t) \\ - \frac{\omega}{4(\omega^2 + 1)} e^t + \frac{\omega}{4(\omega^2 + 9)} e^{-3t}$$

Fazit: komplizierte Rechnungen, aber einfaches Lösungskonzept!

3.5 Stabilität von Differentialgleichungen

Gegeben sei eine *Differentialgleichung erster Ordnung*

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

mit hinreichend glatter rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

Weiterhin sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.

Frage: Wie verhalten sich *benachbarte Lösungen* $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$?

Beispiel: Wir betrachten die beiden Anfangswertaufgaben

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \begin{cases} y_2'(t) = -y_2(t) \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

In beiden Fällen ist die Lösung $y^*(t) = 0$. Die Lösungen $y(t; 0, y_0)$ mit einer Anfangsbedingung $y_0 \neq 0$ sind aber gegeben durch

$$y_1(t) = y_0 e^t \longrightarrow \pm\infty \quad \text{bzw.} \quad y_2(t) = y_0 e^{-t} \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Stabilität von Lösungen.

Definition: Sei $\mathbf{y}^*(t)$ Lösung einer Differentialgleichung.

- (a) Die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ heißt **stabil** auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, falls es zu jedem $t_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle \mathbf{y}_0 mit $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta$ gilt

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in I.$$

Falls δ unabhängig von t_0 gewählt werden kann, so heißt die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ **gleichmäßig stabil** auf I .

- (b) Ist die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ auf einem Intervall $[a, \infty)$ erklärt, so heißt $\mathbf{y}^*(t)$ dort **asymptotisch stabil**, falls $\mathbf{y}^*(t)$ dort stabil ist, und es zu jedem $t_0 \geq a$ stets ein $\delta(t_0) > 0$ gibt, so dass für alle \mathbf{y}_0 mit $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t)\| = 0.$$

Die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ heißt **strikt stabil**, falls $\mathbf{y}^*(t)$ gleichmäßig und asymptotisch stabil ist.

Stabilität der Nulllösung reicht aus.

Bemerkung: Sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)).$$

Setzen wir

$$\mathbf{z}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t),$$

so erfüllt $\mathbf{z}(t)$ die Differentialgleichung

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t) + \mathbf{y}^*(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*(t)) =: \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

Daraus folgt sofort, dass $\mathbf{z}^*(t) = \mathbf{0}$ eine Lösung von

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

ist.

Fazit: Anstelle der Stabilität von $\mathbf{y}^*(t)$ können wir somit – äquivalent dazu – die Stabilität der **Nulllösung** von $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$ untersuchen.

Stabilitätssatz I für lineare Differentialgleichungen.

Satz (Stabilitätssatz I): Für ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}(t) \quad \text{mit } \alpha \leq t < \infty$$

mit stetiger Matrix $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei $\mathbf{Y}(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem. Dann gelten folgende Aussagen.

- Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann stabil auf dem Intervall $[\alpha, \infty)$, wenn das Fundamentalsystem $\mathbf{Y}(t)$ auf I beschränkt ist.
- Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann gleichmäßig stabil auf I , wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass für alle $t \geq t_0 \geq \alpha$ gilt

$$\|\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\| \leq M.$$

- Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{Y}(t)\| = 0.$$

□

Ein weiteres Stabilitätskriterium.

Satz: Sei $\lambda(t)$ der *größte Eigenwert* der Matrix $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T$. Falls

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t) dt = -\infty,$$

so folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = 0$$

für jede Lösung $\mathbf{y}(t)$ von $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t) \mathbf{y}$, d.h. $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist asymptotisch stabil.

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}\|^2 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{y}^T \mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{y})^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T (\mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) \mathbf{y} \\ &\leq \lambda(t) (\mathbf{y}^T \mathbf{y}) = \lambda(t) \cdot \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{y}_0\|^2 \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \right)$$

nach Integration. ■

Stabilitätssatz II für lineare Differentialgleichungen

Satz (Stabilitätssatz II): Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ mit konstanter Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist genau dann

- *strikt stabil*, wenn für alle Eigenwerte λ_j von \mathbf{A} gilt $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$.
- *gleichmäßig stabil*, wenn für alle Eigenwerte λ_j von \mathbf{A} gilt

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(\lambda_j) = 0 \implies g(\lambda_j) = \alpha(\lambda_j)$$

für die geometrische $g(\lambda_j)$ und die algebraische Vielfachheit $\alpha(\lambda_j)$ von λ_j .

- In allen anderen Fällen ist die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{0}$ *instabil*.

Beispiel: Die Nulllösung des Systems mit Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

ist instabil: Die Eigenwerte $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 0$ sind zwar nicht-positiv, aber für den doppelten Eigenwert λ_2 gilt $g(\lambda_2) = 1 < \alpha(\lambda_2) = 2$. □

Ein Beispiel zum Stabilitätssatz II.

- Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Der **eindeutige** Gleichgewichtspunkt ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und ist gegeben durch $\mathbf{y}^* = (3, -2)^T$.

- Die Transformation $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ liefert das homogene System

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z}.$$

- Die Eigenwerte von \mathbf{A} lauten $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$, und damit ist \mathbf{y}^* strikt stabil.

Das Kriterium von Routh und Hurwitz.

Satz (Routh-Hurwitz Kriterium): Für ein reelles Polynom

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{mit } a_n > 0$$

sind folgende Aussagen äquivalent:

- Alle Nullstellen von $p(z)$ haben negativen Realteil.
- Es gilt $a_k > 0$ für alle $k = 0, 1, \dots, n$, und alle Hauptunterdeterminanten der $n \times n$ -Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

sind positiv. Dabei setzen wir $a_k = 0$ für alle $k > n$.

Ein Beispiel zum Routh-Hurwitz Kriterium.

Wir betrachten das Polynom mit strikt positiven Koeffizienten

$$p(z) = 2z^3 + 4z^2 + 5z + 6.$$

Wir stellen zunächst die Matrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ auf:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Hauptunterdeterminanten sind $\det(\mathbf{H}_1) = 5$ sowie

$$\det(\mathbf{H}_2) = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{H}_3) = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

Also besitzen alle Nullstellen von $p(z)$ einen negativen Realteil.

Qualitatives Verhalten ebener konstanter Systeme.

Wir betrachten das homogene *ebene* System mit *konstanten* Koeffizienten

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \text{mit } \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Weiterhin seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von \mathbf{A} mit den zugehörigen Eigenvektoren bzw. Eigen- und Hauptvektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 .

Mit $\mathbf{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ und

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ oder } \lambda_1 = \lambda_2, g(\lambda_2) = 2 \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ und } g(\lambda_2) = 1 \end{cases}$$

erhalten wir für $\mathbf{w}(t) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t)$ die Differentialgleichung $\mathbf{w}'(t) = \mathbf{J}\mathbf{w}(t)$.

Wir untersuchen damit das Stabilitätsverhalten in der (w_1, w_2) -Phasenebene.

Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen.

Wir betrachten das nichtlineare *autonome* System

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$$

wobei $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, d.h. $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

Wir führen eine Stabilitätsuntersuchung durch *Linearisierung*

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t))$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{0})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{o}(\|\mathbf{y}\|) \quad \text{mit } \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

der rechten Seite aus. Diese Linearisierung folgt aus der *Taylor-Entwicklung* der rechten Seite um den Entwicklungspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$, wonach

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{0})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}).$$

Stabilitätssatz III für nichtlineare DGLs.

Satz (Stabilitätssatz III): *Unter obigen Voraussetzungen gilt:*

- *Falls alle Eigenwerte λ_j von $\mathbf{A} = \mathbf{Jf}(\mathbf{0})$ die Bedingung*

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0,$$

erfüllen, so ist $\mathbf{y}^ = \mathbf{0}$ ein **strikt stabiler Gleichgewichtspunkt** von $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, d.h. die Stabilität des linearisierten Systems überträgt sich auf das nichtlineare System.*

- *Existiert ein Eigenwert λ_j von \mathbf{A} mit*

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0,$$

so ist der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^ = \mathbf{0}$ **instabil**, d.h. die Instabilität des linearisierten Problems überträgt sich auf das nichtlineare Problem.*

□

Eine wichtige Bemerkung zur Linearisierung.

Bemerkung: Die Stabilitätsuntersuchung eines nichtlinearen Systems mittels Linearisierung funktioniert *nicht*, falls

- für alle Eigenwerte λ von \mathbf{A} gilt

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$$

- **und** mindestens ein Eigenwert λ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{Re}(\lambda) = 0$$

existiert.

Insbesondere spielt es bei Eigenwerten λ mit $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ *keine Rolle*, wie es sich mit der algebraischen und geometrischen Vielfachheit verhält.

Beispiel: Das mathematische Pendel.

Das *mathematische Pendel* wird beschrieben durch die nichtlineare Differentialgleichung

$$\ddot{\Phi} = -\frac{g}{\ell} \sin \Phi = -\omega^2 \sin \Phi.$$

Dabei bezeichnet $\Phi = \Phi(t)$ den **Auslenkungswinkel** zur Zeit t , ℓ die **Länge** des Pendels und g die **Gravitationskonstante**.

Mit der Substitution

$$y_1 := \Phi \quad y_2 = \dot{\Phi}$$

erhalten wir das *Differentialgleichungssystem erster Ordnung*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin y_1 \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind gerade die Nullstellen der rechten Seite,

$$y_{1k} = k\pi \quad \text{und} \quad y_{2k} = 0 \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel: Linearisierung um Gleichgewichtspunkt.

Wir **linearisieren** nun um den Gleichgewichtspunkt $(y_{1k}, y_{2k}) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}(y_1, y_2) &= \underbrace{\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k})}_{=0} + \mathbf{J}\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k}) \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|) \\
 &= \mathbf{J}\mathbf{f}(k\pi, 0) \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos k\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - k\pi \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_k\|).
 \end{aligned}$$

Stabilität des linearisierten Pendels.

Die Linearisierung führt zu dem *linearen System*

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2(-1)^k(y_1 - k\pi) \end{aligned}$$

Wir berechnen die Eigenwerte der (konstanten) Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2(-1)^k,$$

womit

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm i\omega & : \text{ falls } k \text{ gerade} & \rightsquigarrow \text{ stabiler Wirbelpunkt} \\ \pm \omega & : \text{ falls } k \text{ ungerade} & \rightsquigarrow \text{ instabiler Sattelpunkt} \end{cases}$$

Stabilität mittels Ljapunov-Funktionen. Wir betrachten erneut das nichtlineare *autonome* System

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \quad \text{mit } \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Definition: Eine C^1 -Funktion $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt **Ljapunov-Funktion** auf $\bar{K}_r(\mathbf{0}) \subset D$ für $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, falls gilt

(a)

$$\begin{cases} V(\mathbf{0}) = 0 \\ V(\mathbf{y}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0}) \end{cases}$$

(b)

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0}).$$

Falls in (b) sogar die strengere Bedingung

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle < 0 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \text{ mit } 0 < \|\mathbf{y}\| \leq r$$

gilt, so nennt man $V(\mathbf{y})$ eine **strenge Ljapunov-Funktion**.

Stabilitätssatz IV mit Ljapunov-Funktionen.

Satz (Stabilitätssatz IV):

- Existiert eine Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{y})$ von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, so ist die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein *gleichmäßig stabiler Gleichgewichtspunkt*.
- Ist $V(\mathbf{y})$ zudem eine strenge Ljapunov-Funktion von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, so ist die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein *asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt*.

Beweisidee: Wir berechnen die Zeitableitung der Funktion $V(\mathbf{y}(t))$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(\mathbf{y}(t)) &= \text{grad}(V(\mathbf{y}(t))) \cdot \mathbf{y}'(t) \\ &= \text{grad}(V(\mathbf{y}(t))) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \\ &= \langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle\end{aligned}$$

Ist V eine (**strenge**) Ljapunov-Funktion, so ist $V = V(\mathbf{y}(t))$ (**strenge**) monoton fallend. □

Instabilität und Ljapunov-Funktionen.

Bemerkung: Wir betrachten erneut die autonome Gleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \quad \text{mit } \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

d.h. die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist ein Gleichgewichtspunkt.

Existiert eine \mathcal{C}^1 -Funktion $V(\mathbf{y})$ mit den Eigenschaften

$$\begin{cases} V(\mathbf{0}) = 0 \\ V(\mathbf{y}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{y} \in \bar{K}_r(\mathbf{0}) \end{cases}$$

und

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle > 0 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \text{ mit } 0 < \|\mathbf{y}\| \leq r$$

so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein **instabiler** Gleichgewichtspunkt.

Ein Beispiel zu Ljapunov-Funktionen.

Wir betrachten das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + y \\ \dot{y} &= -x - y^5\end{aligned}$$

Der Nullpunkt ist ein isolierter Gleichgewichtspunkt des Systems.

Mit dem Ansatz

$$V(x, y) = ax^2 + by^2, \quad a, b > 0$$

gilt offensichtlich

$$V(0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad V(x, y) > 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Fortsetzung des Beispiels.

Weiterhin berechnen wir

$$\begin{aligned}\langle \nabla V(x, y), \mathbf{f}(x, y) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2ax(-x^3 + y) + 2by(-x - y^5) \\ &= -2ax^4 + 2axy - 2bxy - 2by^6\end{aligned}$$

Setzt man $a = b > 0$, so folgt

$$V(x, y) = -2ax^4 - 2by^6$$

d.h. V ist eine **strenge Ljapunov-Funktion** und der Nullpunkt ist ein **asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt**.

Ljapunov-Funktion für das mathematische Pendel.

Beim mathematischen Pendel

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin y_1\end{aligned}$$

setzt man

$$V(y_1, y_2) := \frac{1}{2}y_2^2 + \omega^2(1 - \cos y_1)$$

Damit gilt $V(0, 0) = 0$ und $V(y_1, y_2) > 0$ für $(y_1, y_2) \in \bar{K}_r(\mathbf{0})$, $r < \pi$.

Weiterhin berechnen wir

$$\langle \nabla V, \mathbf{f} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \omega^2 \sin y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Somit ist V eine Ljapunov-Funktion auf $\bar{K}_r(\mathbf{0})$, und der Nullpunkt ist ein *stabiler Gleichgewichtspunkt*. Allerdings existiert für dieses Beispiel *keine* strenge Ljapunov-Funktion, da der Ursprung *nicht* asymptotisch stabil ist. \square

4 Randwertaufgaben

4.1 Allgemeines

Wir betrachten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \text{mit } \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei sei $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hinreichend oft stetig differenzierbar.

Anfangswertaufgabe: Gib eine Lösung zur Zeit $t = a$ vor:

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0.$$

Randwertaufgabe: Zur Festlegung einer Lösung $\mathbf{y}(t)$ werden nicht alle Komponenten y_i an einer Stelle vorgegeben wie oben, sondern

gewisse Komponenten y_i an *verschiedenen* Stellen $t = a, b, c, \dots$

Typische Beispiele zu Randwertaufgaben.

- Sturmsche Randwertaufgaben

$$\begin{cases} y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = h(t) \\ \alpha_1y(a) + \alpha_2y'(a) = d_1 \\ \beta_1y(b) + \beta_2y'(b) = d_2 \end{cases}$$

- Lineare Randwertaufgaben

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) = \mathbf{d} \end{cases}$$

- Allgemeine Zweipunkt–Randwertaufgaben

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0 \end{cases}$$

Randwerte entscheiden Existenz und Eindeutigkeit.

Beispiel: Wir betrachten die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + y = 0.$$

- Die Randwerte

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ergeben die **eindeutig bestimmte** Lösung $y(t) = \sin t$.

- **Keine** Lösung existiert für die Randwerte

$$y(0) = 0 \quad y(\pi) = 1$$

- Für die Randwerte

$$y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

gibt es **unendlich viele** Lösungen $y(t) = c \sin t$ mit einem beliebigen $c \in \mathbb{R}$.

Existenzsatz für lineare Randwertaufgaben.

Satz: Gegeben sei die lineare Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) = \mathbf{d} \end{cases}$$

mit stetigen Funktionen $\mathbf{A}(t), \mathbf{h}(t), t \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $\mathbf{Y}(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem zu $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$. Dann sind äquivalent:

- Die Randwertaufgabe ist für *alle stetigen* Inhomogenitäten $\mathbf{h}(t)$ und Randwerte \mathbf{d} stets *eindeutig lösbar*.
- Die zugehörige Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) = \mathbf{0} \end{cases}$$

hat nur die *triviale* Lösung $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$.

- Die Matrix $\mathbf{E} := \mathbf{B}_a\mathbf{Y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{Y}(b) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist *regulär*.

Zurück zu unserem Beispiel der DGL $y'' + y = 0$.

Wir schreiben die Gleichung zweiter Ordnung zunächst als ein System und bestimmen anschließend das zugehörige Fundamentalsystem:

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{B}_a \mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix \mathbf{E} ist demnach **regulär** für $b = \pi/2$ und **singulär** für $b = \pi$.

4.2 Grundbegriffe der Variationsrechnung

Das Problem der **Brachistochrone** (JOHANN BERNOULLI, 1696):

Man bestimme eine differenzierbare Funktion $y = y(t)$ mit Randbedingungen $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, so dass das Integral

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(t)}} dt$$

minimal wird.

Physikalische Interpretation: Das angegebene Funktional $I[y]$ beschreibt – bis auf einen Vorfaktor – die Zeit, die ein Massenpunkt benötigt, um unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang der Kurve $y = y(t)$ von Punkt $A = (a, y_a)$ zum Punkt $B = (b, y_b)$ zu kommen. □

Allgemeine Formulierung einer Variationsaufgabe.

Gesucht ist eine differenzierbare Funktion $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die die vorgegebenen Randbedingungen

$$y(a) = y_a \quad y(b) = y_b$$

erfüllt und gleichzeitig ein Funktional der Form

$$I[y] = \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt$$

minimiert.

Ziel: Wir suchen eine Randwertaufgabe, die zu der oben formulierten Variationsaufgabe äquivalent ist.

Lösung des Variationsproblems (LAGRANGE, 1755).

Sei $y_0(t)$ die Lösung des **allgemeinen Variationsproblems** und $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine **beliebige** differenzierbare Funktion mit

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Setzen wir $y(t, \varepsilon)$ als

$$y(t, \varepsilon) := y_0(t) + \varepsilon h(t),$$

so besitzt die Funktion

$$J(\varepsilon) := I[y(\cdot, \varepsilon)] = I[y_0 + \varepsilon h]$$

im Punkt $\varepsilon = 0$ ein **Minimum**, denn $y_0(t)$ löst das allgemeine Variationsproblem.

Da $J(\varepsilon)$ eine skalare Funktion der reellen Variablen ε ist, gilt als notwendige Bedingung für einen (lokalen) Extremwert (nach Analysis I)

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = 0.$$

Die erste Variation δI .

Definition: Der Ausdruck δI definiert durch

$$\delta I := \left. \frac{d}{d\varepsilon} I[y_0 + \varepsilon h] \right|_{\varepsilon=0}$$

heißt die **erste Variation** des Funktionals $I[y]$.

Damit man eine Lösung des Variationsproblem erhält, muss $\delta I = 0$ gelten.

Bemerkung:

- Die Funktion

$$\delta y(t) := \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = h(t)$$

nennt man auch die **erste Variation** der abhängigen Variablen.

- Die erste Variation δI entspricht der Richtungsableitung von $I[y]$ in Richtung h an der Stelle y_0 .

Die Berechnung der ersten Variation.

Die **erste Variation** berechnet man wie folgt.

$$\begin{aligned}
 \delta I &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(t, y_0 + \varepsilon h, y_0' + \varepsilon h') dt \right|_{\varepsilon=0} \\
 &= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') \cdot h(t) + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h'(t)}_{\text{Partielle Integration}} \right) dt \\
 &= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t) dt + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h(t) \Big|_a^b}_{=0} \\
 &= \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t) dt.
 \end{aligned}$$

Das Fundamentallemma der Variationsrechnung.

Wir erhalten somit aus der Bedingung $\delta I = 0$:

$$\int_a^b \left(f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) \right) \cdot h(t) dt \stackrel{!}{=} 0$$

Da $h(t)$ beliebig ist, folgt das **Fundamentallemma der Variationsrechnung**

$$f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = 0 \quad \text{für } a \leq t \leq b.$$

Satz: *Jede Lösung der oben definierten Variationsaufgabe ist zugleich eine Lösung der Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned} f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) &= 0 \\ y_0(a) = y_a \quad y_0(b) &= y_b \end{aligned}$$

*Die Differentialgleichung nennt man die **Euler-Lagrange Gleichung**.* □

Explizite Form der Euler-Lagrange Gleichung.

Wegen

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = f_{y't}(t, y_0, y'_0) + f_{y'y}(t, y_0, y'_0) \cdot y'_0 + f_{y'y'}(t, y_0, y'_0) \cdot y''_0$$

läßt sich die Euler-Lagrange-Gleichung unter der **Regularitätsbedingung**

$$f_{y'y'}(t, y_0, y'_0) \neq 0$$

nach y''_0 auflösen und damit in der expliziten Form

$$y''_0 = \frac{f_y(t, y_0, y'_0) - f_{y't}(t, y_0, y'_0) - f_{y'y}(t, y_0, y'_0) \cdot y'_0}{f_{y'y'}(t, y_0, y'_0)}$$

schreiben.

Bemerkung: Die Gleichung läßt sich in zwei Spezialfällen vereinfachen:

- die Funktion f ist unabhängig von y , d.h. $f = f(t, y')$,
- die Funktion f hängt nicht explizit von t ab, d.h. $f = f(y, y')$.

Zwei Spezialfälle der Euler-Lagrange Gleichung

- Hängt f nicht von y ab, $f = f(t, y')$ so lautet die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = 0.$$

Dies bedeutet aber für alle $a \leq t \leq b$

$$f_{y'}(t, y_0, y'_0) \equiv \text{const}$$

- Hängt f nicht explizit von t ab, so gilt für alle $a \leq t \leq b$

$$H := f - f_{y'} y' \equiv \text{const},$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t) &= \frac{d}{dt} (f - f_{y'} y') = f_y y' + f_{y'} y'' - \left(\frac{d}{dt} f_{y'} \right) y' - f_{y'} y'' \\ &= \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right) y' = 0. \end{aligned}$$

Beispiel: Das Problem der Brachistochrone.

Gesucht ist eine \mathcal{C}^1 -Funktion $y(t)$, die das Funktional

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(t)}} dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$y(a) = y_a \quad \text{und} \quad y(b) = y_b$$

minimiert.

Der Integrand von $I[y]$ hängt nicht explizit von t ab, wir bestimmen daher die **Hamilton-Funktion**

$$\begin{aligned} H &= f - f_{y'} y' \\ &= \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(t)}} - \sqrt{\frac{y_a - y(t)}{1 + (y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a - y(t)} \cdot y'(t). \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Für die **Hamilton-Funktion** gilt

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(t)}} - \sqrt{\frac{y_a - y(t)}{1 + (y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a - y(t)} \cdot y'(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (y'(t))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y_a - y(t)}} = c_1 = \text{const.} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{\frac{2c - (y_a - y)}{y_a - y}} \quad \text{mit } 2c = \frac{1}{c_1^2} > 0$$

Eine Trennung der Variablen ergibt dann die implizite Darstellung

$$\int_{y_a}^y \sqrt{\frac{y_a - \eta}{2c - (y_a - \eta)}} d\eta = t - a,$$

einer **Zykloide** (vgl. Analysis 2).

4.3 Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung

Wir betrachten eine lineare Randwertaufgabe zweiter Ordnung

$$L[y] := y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = h(t)$$

$$R_1[y] := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y'(b) = d_1$$

$$R_2[y] := \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) + \gamma_2 y(b) + \delta_2 y'(b) = d_2$$

Damit das oben stehende System eine Lösung hat, nehmen wir an, dass die zugehörige homogene Randwertaufgabe

$$L[y] = 0, \quad R_1[y] = R_2[y] = 0$$

nur die triviale Lösung besitzt.

Beobachtung: Das Problem läßt sich stets auf ein **Problem mit homogenen Randbedingungen** zurückführen.

Rückführung auf homogene Randbedingungen.

Sei $y_0(t)$ eine \mathcal{C}^2 -Funktion mit

$$R_1[y_0] = d_1 \quad \text{und} \quad R_2[y_0] = d_2$$

d.h. $y_0(t)$ erfülle die gegebenen Randbedingungen.

Wir setzen dann

$$z(t) := y(t) - y_0(t)$$

Folgerung: Löst $y(t)$ das Problem

$$L[y] = h(t), \quad R_1[y] = d_1, \quad R_2[y] = d_2,$$

so löst $z(t)$ das homogene Randwertproblem

$$L[z] = \tilde{h}(t) := h(t) - L[y_0](t), \quad R_1[z] = 0, \quad R_2[z] = 0.$$

Die Greensche Funktion bei Randwertaufgaben.

- Randwertaufgaben zweiter Ordnung mit homogenen Randbedingungen lassen sich stets mit Hilfe der Greenschen Funktion lösen.
- Dabei erhält man die Lösungsdarstellung

$$y(t) = \int_a^b G(t, \tau) h(\tau) d\tau$$

mit der **Greenschen Funktion** $G(t, \tau)$ und $a \leq t, \tau \leq b$.

- **Entscheidender Vorteil:** Die Greensche Funktion hängt nur vom Differentialoperator $L[y]$ ab, aber **nicht** von der Inhomogenität $h(t)$.
- Ist die Greensche Funktion für den Differentialoperator $L[y]$ bestimmt, so lassen sich die Lösungen mit beliebiger Inhomogenität in der obigen Form darstellen.

Zur Konstruktion der Greenschen Funktion.

Wir nehmen an, dass $G(t, \tau)$ auf den beiden Mengen

$$D_1 := \{(t, \tau) \mid a \leq \tau \leq t \leq b\} \quad \text{und} \quad D_2 := \{(t, \tau) \mid a \leq t \leq \tau \leq b\}$$

glatt sei, d.h. sich als eine \mathcal{C}^2 -Funktion auf den Rand fortsetzen lasse, dass jedoch $G(t, \tau)$ für $t = \tau$ Sprünge haben könnte.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^b G(t, \tau) h(\tau) \, d\tau \\ y'(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_a^t G(t, \tau) h(\tau) \, d\tau + \int_t^b G(t, \tau) h(\tau) \, d\tau \right\} \\ &= \int_a^b G_t(t, \tau) h(\tau) \, d\tau + [G(t, t^-) - G(t, t^+)] h(t). \end{aligned}$$

Zur Konstruktion der Greenschen Funktion.

Wir verlangen nun

$$G(t, t^-) - G(t, t^+) = 0,$$

d.h. $G(t, \tau)$ ist stetig für $t = \tau$.

Für die zweite Ableitung gilt dann

$$y''(t) = \int_a^b G_{tt}(t, \tau) h(\tau) d\tau + [G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+)] h(t)$$

und daher

$$L[y](t) = \int_a^b L[G(\cdot, \tau)](t) h(\tau) d\tau + [G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+)] h(t).$$

Wir fordern daher für die Greensche Funktion $G(t, \tau)$

$$L[G(\cdot, \tau)] = 0 \quad \text{und} \quad G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+) = 1.$$

Lösungsdarstellung mit der Greenschen Funktion.

Satz: Sei $G(t, \tau)$ eine Funktion $G(t, \tau)$, die folgende Eigenschaften erfülle.

- Die Funktion $G(t, \tau)$ ist stetig auf $[a, b]^2$ und lässt sich auf D_1 und D_2 als C^2 -Funktion fortsetzen.
- Die Funktion $G(t, \tau)$ erfüllt bei festem τ die homogene Differentialgleichung $L[G(\cdot, \tau)] = 0$ für $t \in [a, \tau]$ und $t \in [\tau, b]$ sowie die Randbedingungen

$$R_k[G(\cdot, \tau)] = 0, \quad \text{für } k = 1, 2.$$

- Die Funktion $G(t, \tau)$ erfüllt die Bedingung

$$G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+) = 1.$$

Dann ist die Lösung $y(t)$ des Randwertproblems gegeben durch

$$y(t) = \int_a^b G(t, \tau) h(\tau) d\tau.$$

□

Zur Konstruktion einer Greenschen Funktion.

- Ist $y_1(t), y_2(t)$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, so verwenden wir den Ansatz

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (a_1(t) + b_1(t))y_1(t) + (a_2(t) + b_2(t))y_2(t) & : \tau \leq t \\ (a_1(t) - b_1(t))y_1(t) + (a_2(t) - b_2(t))y_2(t) & : \tau \geq t \end{cases}$$

- Die Stetigkeit und Sprungbedingung an $G(t, \tau)$ liefert dann

$$b_1(t)y_1(t) + b_2(t)y_2(t) = 0$$

$$b_1(t)y_1'(t) + b_2(t)y_2'(t) = \frac{1}{2}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für $b_1(t)$ und $b_2(t)$ mit regulärer Koeffizientenmatrix.

- Die Randbedingungen ergeben schließlich ein lineares Gleichungssystem für die beiden Größen $a_1(t)$ und $a_2(t)$, das ebenfalls eindeutig lösbar ist.

Ein Beispiel zur Greenschen Funktion.

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned}y''(t) + y(t) &= h(t) \\ y(0) - y(\pi) &= 0 \\ y'(0) - y'(\pi) &= 0\end{aligned}$$

Ein **Fundamentalsystem** ist $y_1(t) = \cos(t)$ und $y_2(t) = \sin(t)$.

Unser Ansatz für die Greensche Funktion lautet daher

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (a_1(t) + b_1(t)) \cos t + (a_2(t) + b_2(t)) \sin t & : \tau \leq t \\ (a_1(t) - b_1(t)) \cos t + (a_2(t) - b_2(t)) \sin t & : \tau \geq t \end{cases}$$

Die Koeffizienten $b_1(t)$ und $b_2(t)$ lösen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t &= 0 \\ -b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels.

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t &= 0 \\ -b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t &= 1/2\end{aligned}$$

kann wie folgt gelöst werden.

- Multipliziere die erste Gleichung mit $\sin(t)$ sowie die zweite Gleichung mit $\cos(t)$ und addiere die beiden Gleichungen.
- Wir erhalten damit

$$(\sin^2(t) + \cos^2(t))b_2(t) = \cos(t)/2$$

und daraus folgt

$$b_2(t) = \cos(t)/2.$$

- Durch Einsetzen dieser Lösung ergibt sich $b_1(t)$ als

$$b_1(t) = -\sin(t)/2.$$

Weitere Fortsetzung des Beispiels.

Wir setzen nun $G(t, \tau)$ in die vorgegebenen Randbedingungen ein, womit

$$\begin{aligned} G(0, \tau) &= (a_1(\tau) + b_1(\tau)) \cos t|_{t=0} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \sin t|_{t=0} \\ &= a_1(\tau) + b_1(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\pi, \tau) &= (a_1(\tau) + b_1(\tau)) \cos t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \sin t|_{t=\pi} \\ &= -\left(a_1(\tau) + b_1(\tau)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_t(0, \tau) &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \sin t|_{t=0} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \cos t|_{t=0} \\ &= a_2(\tau) + b_2(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_t(\pi, \tau) &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \sin t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \cos t|_{t=\pi} \\ &= -\left(a_2(\tau) + b_2(\tau)\right). \end{aligned}$$

Komplettierung des Beispiels.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}G(0, \tau) - G(\pi, \tau) &= \left(a_1(\tau) - b_1(\tau) \right) + \left(a_1(\tau) + b_1(\tau) \right) \stackrel{!}{=} 0 \\G_t(0, \tau) - G_t(\pi, \tau) &= \left(a_2(\tau) - b_2(\tau) \right) + \left(a_2(\tau) + b_2(\tau) \right) \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Daraus folgt aber $a_1(\tau) = a_2(\tau) = 0$ und die **Greensche Funktion** lautet

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(t - \tau) & : \tau \leq t \\ -\frac{1}{2} \sin(t - \tau) & : \tau \geq t. \end{cases}$$

Die Lösung der Randwertaufgabe ist dann gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(t - \tau) h(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_t^\pi \sin(t - \tau) h(\tau) d\tau.$$

Beachte: Die Lösungsformel gilt für **beliebige** Inhomogenitäten $h(t)$. □

4.4 Eigenwertaufgaben

Gegeben sei ein *homogenes lineares Randwertproblem* n -ter Ordnung

$$L[y] = y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t, \lambda)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t, \lambda)y(t) = 0$$

$$R_k[y] = \sum_{l=0}^{n-1} \left(\alpha_{k,l} y^{(l)}(a) + \beta_{k,l} y^{(l)}(b) \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Die Koeffizienten der Differentialgleichung und die Randbedingungen hängen von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} ab.

Ziel: Wir suchen nach **nichttrivialen** Lösungen des Problems.

Sei y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem von $L[y]$. Dann hängen die y_k auch von λ ab, d.h. $y_k = y_k(t, \lambda)$ und eine Lösung lässt sich als Linearkombination

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(t, \lambda)$$

darstellen.

Die Linearkombination

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(t, \lambda)$$

ist eine Lösung, falls die Randbedingungen

$$R_j[y] = \sum_{k=1}^n c_k R_j[y_k] = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

erfüllt sind. Dies ergibt für die Koeffizienten c_1, \dots, c_n ein *homogenes lineares Gleichungssystem* mit Systemmatrix

$$\mathbf{E}(\lambda) := \begin{pmatrix} R_1[y_1] & \dots & R_1[y_n] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_n[y_1] & \dots & R_n[y_n] \end{pmatrix}$$

Es existieren also *genau dann* nichttriviale Lösungen $y(t) \neq 0$, wenn gilt

$$D(\lambda) := \det \mathbf{E}(\lambda) = 0.$$

Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Definition: Die Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. \mathbb{C} mit $D(\lambda) = 0$ heißen **Eigenwerte** der Randwertaufgabe. Die zugehörigen nichttrivialen Lösungen nennt man die zugehörigen **Eigenfunktionen**. Diese sind bis auf skalare Vielfache eindeutig.

Bemerkung: Die Bedingung $D(\lambda) = 0$ ist im Allgemeinen ein nichtlineares Nullstellenproblem mit unendlich vielen Lösungen.

Eigenwertprobleme lassen sich in nichtlineare Randwertaufgaben transformieren.

Wir setzen dazu $y_{n+1}(t) := \lambda$ und finden dann

$$\begin{aligned}y^{(n)}(t) &= -a_{n-1}(t, y_{n+1})y^{(n-1)}(t) - \dots - a_0(t, y_{n+1})y(t) \\y'_{n+1} &= 0 \\R_k[y, y_{n+1}] &= 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n \\y'(a) &= 1 \quad (\text{Normierung}).\end{aligned}$$

Ein Beispiel.

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

Die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung lautet:

$$y(t) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\lambda) = 0$$

Für die **Eigenwerte** ergibt sich demnach

$$\lambda_k = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

mit zugehörigen **Eigenfunktionen**

$$y_k(t) = \sin(\lambda_k t).$$

Noch ein Beispiel.

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0$$

Die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung lautet

$$y(t) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(1) - y'(1) = 0 \Rightarrow c_2 \left(\sin(\lambda) - \lambda \cos(\lambda) \right) = 0$$

Die **Eigenwerte** sind die Lösungen der nichtlinearen Gleichung $\lambda = \tan(\lambda)$ mit zugehörigen **Eigenfunktionen**

$$y_k(t) = \begin{cases} \sin(\lambda_k t) & : \lambda_k \neq 0, \\ t & : \lambda_k = 0. \end{cases}$$

5 Numerische Methoden

5.1 Allgemeines

Gegeben sei eine skalare Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(a) = y_a. \end{cases}$$

Wir wollen die Lösung $y(t)$ an einer Stelle $b > a$ berechnen.

Kann man die Lösung nicht **analytisch** bestimmen, so verwendet man **Diskretisierungsverfahren**. Dazu sei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ eine Zerlegung des Integrationsintervalls, auf der wir Näherungen

$$Y_j \approx y(t_j), \quad j = 0, \dots, m$$

numerisch berechnen.

Man nennt $h_j := t_{j+1} - t_j$ die **Schrittweite** der Diskretisierung.

Numerischer Integrator und Klassifikation.

Definition: Ein Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung (Y_0, \dots, Y_m) bezeichnet man als **numerischen Integrator**.

Numerische Verfahren lassen sich bestimmten Klassen zuordnen:

- **Einschrittverfahren**

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

Man nennt Φ die **Verfahrensfunktion**.

- **Mehrschrittverfahren**

$$Y_{j+1} = \Phi(Y_j, \dots, Y_{j-k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

Man verwendet dazu die bereits berechneten Näherungen Y_j, \dots, Y_{j-k} .

- **Extrapolationsverfahren**

Kombiniere ein Einschritt- bzw. Mehrschrittverfahren mit verschiedenen Schrittweiten und extrapoliere das Ergebnis.

Wichtige Fragen zur Qualität eines Integrators.

- Es gelte $Y_j = y(t_j)$. Welchen Fehler machen wir im nächsten Integrationsschritt, d.h. wie groß ist die Abweichung

$$|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}|?$$

- Wenn wir die **lokalen** Fehler $|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}|$ kontrollieren können, was gilt dann zur Zeit $t = b$, d.h. wie groß ist

$$|y(b) - Y_m|?$$

- **Konvergiert** das Verfahren im Grenzfall $h_j \rightarrow 0$?
- Gibt es eine geeignete Wahl für die Schrittweiten h_j , so dass der Approximationsfehler – im Vergleich zum Rechenaufwand – minimal wird.

5.2 Einschrittverfahren

Das **Eulersche Polygonzugverfahren** ist das einfachste Einschrittverfahren:

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j f(t_j, Y_j)$$

Das Verfahren entsteht aus der Approximation

$$y''(t_j) = f(t_j, Y_j) \approx \frac{1}{h_j} (Y_{j+1} - Y_j)$$

Geometrische Beschreibung:

Zur Approximation des Wertes Y_j laufe ein kurzes Stück in Richtung der Tangente im Punkt Y_j , d.h. entlang der Geraden mit Steigung $f(t_j, Y_j)$.

Zwei weitere Einschrittverfahren.

Das Verfahren von HEUN: Wähle den Mittelwert zweier Steigungen

$$\begin{aligned}K_1 &:= f(t_j, Y_j) \\K_2 &:= f(t_j + h_j, Y_j + h_j K_1) \\Y_{j+1} &:= Y_j + h_j \left(\frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 \right)\end{aligned}$$

Das modifizierte Euler-Verfahren (LOTHAR COLLATZ, Hamburg, 1960):

Wähle eine mittlere Steigung

$$\begin{aligned}K_1 &:= f(t_j, Y_j) \\K_2 &:= f\left(t_j + \frac{h_j}{2}, Y_j + \frac{h_j}{2} K_1\right) \\Y_{j+1} &:= Y_j + h_j K_2\end{aligned}$$

Der lokale Diskretisierungsfehler.

Definition: Gegeben sei die Näherung (t_j, Y_j) und ein Einschrittverfahren der Form

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

Sei $z(t)$ die Lösung des (lokalen) Anfangswertproblems

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad z(t_j) = Y_j.$$

- Das **exakte Inkrement** ist gegeben durch

$$\Delta(t_j, Y_j, h) := \frac{z(t_j + h) - Y_j}{h}$$

- Man nennt dann

$$\tau(t_j, Y_j, h) := \Delta(t_j, Y_j, h) - \Phi(t_j, Y_j, h)$$

den **lokalen Diskretisierungsfehler**.

Konsistente Verfahren und Verfahrensordnung.

Definition (Fortsetzung):

- Das Einschrittverfahren heißt **konsistent**, falls für alle hinreichen oft stetig differenzierbaren rechten Seiten $f(t, y)$ gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t_j, Y_j, h) = 0$$

Das Einschrittverfahren besitzt die **Ordnung** p , falls gilt:

$$\tau(t_j, Y_j, h) = O(h^p)$$

d.h.

$$\exists C, h_0 > 0 : \forall h \in (0, h_0] : |\tau(t_j, Y_j, h)| \leq Ch^p$$

Bemerkung: Man kann den lokalen Diskretisierungsfehler auch als

$$\tau(t_j, Y_j, h) = \frac{1}{h} \left(z(t_{j+1}) - Y_{j+1} \right)$$

darstellen, d.h. τ ist der Integrationsfehler pro Schrittweite.

Berechnung der Konsistenzordnung.

Man verwendet dazu die **Taylor-Entwicklung** von $z(t+h)$ um $h=0$:

$$z(t+h) = z(t) + z'(t)h + z''(t)\frac{h^2}{2} + \dots$$

Nun gilt neben $z(t) = Y$

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

$$z''(t) = f_t(t, z) + f_y(t, z)z' = f_t(t, z) + f_y(t, z)f(t, z)$$

$$z^{(3)}(t) = f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 d$$

Wir erhalten daher für $\Delta(t, y, h) = (z(t+h) - Y)/h$ den Ausdruck

$$\Delta = f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + \frac{h^2}{6}\left(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 d\right) + \mathcal{O}(h^3),$$

wobei die rechte Seite an der Stelle $(t, z(t)) = (t, Y)$ ausgewertet wird.

Beispiele.

- Beim Euler-Verfahren gilt $\Phi = f(t, Y)$ und daher

$$\tau = \Delta - \Phi = f + \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + \mathcal{O}(h^2) - \Phi = \frac{h}{2}(f_t + f_y f) + \mathcal{O}(h^2)$$

Das Verfahren ist also **konsistent erster Ordnung**.

- Beim Verfahren von Heun gilt

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2} (f(t, Y) + f(t + h, Y + hf(t, Y))) \\ &= \frac{1}{2} \left(f(t, Y) + f(t, Y) + \frac{h}{2}(f_t(t, Y) + f_y(t, Y)f(t, Y)) + \mathcal{O}(h^2) \right).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\tau = \Delta - \Phi = \mathcal{O}(h^2)$$

Das Heun-Verfahren ist ein **konsistentes Verfahren zweiter Ordnung**.

Konvergenzsatz.

Satz: *Die exakte Lösung des Anfangswertproblems*

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_a$$

existiere im Intervall $[a, b]$. Das Einschrittverfahren der Form

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

sei konsistent und besitze die Ordnung p mit $|\tau(t, Y, h)| \leq Ch^p$. Weiterhin sei die Verfahrensfunktion Φ Lipschitz-stetig bezüglich Y :

$$|\Phi(t, \tilde{Y}, h) - \Phi(t, Y, h)| \leq L|\tilde{Y} - Y|.$$

Dann gilt für die mit äquidistanter Schrittweite $h = (b - a)/m$, $m \in \mathbb{N}$, berechneten Näherungen $Y_m = Y(b; h)$ von $y(b)$:

$$|Y(b; h) - y(b)| \leq \frac{1}{L} \left(e^{L(b-a)} - 1 \right) Ch^p.$$

□

Runge-Kutta Verfahren.

Die allgemeine Form eines Runge–Kutta Verfahrens mit **Stufenzahl** s lautet

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^s c_i K_i(t_j, Y_j, h_j)$$

$$K_1(t, Y, h) = f(t, Y)$$

$$K_i(t, Y, h) = f\left(t + a_i h, Y + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l\right)$$

Schreibweise als **Butcher-Schema**

0					
a_2	b_{21}				
a_3	b_{31}	b_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
a_s	b_{s1}	b_{s2}	\dots	$b_{s,s-1}$	
	c_1	c_2	$\dots c_{s-1}$	c_s	

Beispiele.

- Das **Verfahren von Heun** ($p = 2$) als Butcher-Schema:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

- Das **modifizierte Euler-Verfahren** ($p = 2$) als Butcher-Schema:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Weitere Beispiele.

- Die **Kutta-Regel** ($p = 3$)

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
1	-1	2		
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	

- Das **klassische Runge-Kutta Verfahren** ($p = 4$)

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren.

Man kombiniert zwei Runge-Kutta Verfahren der Ordnung p und $p + 1$, um eine automatische Schrittweitensteuerung zu generieren:

$$\frac{z(t_j + h) - Y_{j+1}}{h} = Ch^p + \mathcal{O}(h^{p+1})$$
$$\frac{z(t_j + h) - \hat{Y}_{j+1}}{h} = \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Daraus folgt aber

$$\tau(t_j, Y_j, h) \approx Ch^p \approx \frac{|\hat{Y}_{j+1} - Y_j|}{h} =: \tau_{\text{est}}$$

Wähle die Schrittweite stets so, dass

$$\tau_{\text{est}} \leq \text{TOL}$$

mit gegebener Genauigkeitstoleranz TOL gilt.

Allgemeine Form der RKF-Verfahren.

Die allgemeine Form der Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren ist gegeben durch

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^s c_i K_i(t_j, Y_j, h_j)$$

$$\hat{Y}_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^{\hat{s}} \hat{c}_i K_i(t_j, Y_j, h_j)$$

$$K_i(t, Y, h) = f \left(t + \alpha_i h, Y + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l \right)$$

Beispiel: Das RKF2(3)–Verfahren nach ERWIN FEHLBERG (1969):

0		
1	1	
1/2	1/4	1/4
p = 2	1/2	1/2
p = 3	1/6	1/6 2/3

Beispiel. Das RKF4(5)–Verfahren nach ENGLAND (1969)

0						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
1	0	-1	2			
$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{10}{27}$	0	$\frac{1}{27}$		
$\frac{1}{5}$	$\frac{28}{625}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{546}{625}$	$\frac{54}{625}$	$-\frac{378}{625}$	
	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	
	$\frac{14}{336}$	0	0	$\frac{35}{336}$	$\frac{162}{336}$	$\frac{125}{336}$

5.3 Anfangswertmethoden für Randwertprobleme

Das einfache Schießverfahren (Shooting Method): Wir betrachten ein Randwertproblem zweiter Ordnung der Form

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases}$$

Grundidee des Schießverfahrens: Kombiniere ein numerisches Verfahren für das zugehörige Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y') \\ y(a) = y_a \\ y'(a) = z \end{cases}$$

mit einem iterativen Prozess bezüglich des *freien* Parameters z , um die rechte Randbedingung zu erfüllen, d.h. $y(b) = y_b$.

Einfaches Schießverfahren und Nullstellenproblem.

Bezeichnen wir mit $y(t; z)$ die Lösung des Anfangswertproblems, so führt das Schießverfahren auf ein *Nullstellenproblem* der Funktion

$$F(z) := y(b; z) - y_b$$

Beispiel: Für die Randwertaufgabe

$$y'' = -y, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1$$

erhalten wir das zugehörige Anfangswertproblems

$$y'' = -y, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = z$$

die Lösung

$$y(x) = z \sin x + 4 \cos x$$

Die Funktion $F(z)$ lautet daher

$$F(z) = z \sin 1 + 4 \cos 1 - 1.$$

Lösung des Nullstellenproblems.

Zur Lösung des Nullstellenproblems $F(z) = 0$ haben wir zwei Verfahren kennengelernt.

- **Das Bisektionsverfahren:** Seien z_1 und z_2 zwei Punkte mit $F(z_1) \cdot F(z_2) < 0$.

Wir berechnen dann

$$z_3 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

Falls $F(z_1) \cdot F(z_3) < 0$ so setzen wir $z_1 = z_3$, ansonsten $z_2 = z_3$.

- **Das Newton-Verfahren:** Wir verwenden die Iterationsvorschrift

$$z_{k+1} = z_k - \frac{F(z_k)}{F'(z_k)}$$

Das Newton-Verfahren konvergiert im Allgemeinen quadratisch, aber man muss die Ableitung $F'(z_k)$ berechnen.

Allgemeine Zweipunkt-Randwertprobleme.

Für $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$ sei die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0 \end{cases}$$

gegeben.

Schießverfahren: Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y}(a) = \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

mit der Lösung $\mathbf{y}(t; \mathbf{z})$. Das äquivalente Nullstellenproblem lautet jetzt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) := \mathbf{r}(\mathbf{z}, \mathbf{y}(b; \mathbf{z})) = \mathbf{0}$$

Die Funktion $\mathbf{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ist glatt, falls $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ und $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ hinreichend oft stetig differenzierbar sind.

Lösung des zugehörigen Nullstellenproblems.

Zur Lösung des Nullstellenproblems $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ verwendet man das **gedämpfte Newton-Verfahren** aus Analysis III: Für $k = 0, 1, 2, \dots$ berechnet man

$$\begin{aligned}\mathbf{Jf}(\mathbf{z}^k) \cdot \Delta \mathbf{z}^k &= -\mathbf{f}(\mathbf{z}^k) \\ \mathbf{z}^{k+1} &= \mathbf{z}^k + \lambda_k \Delta \mathbf{z}^k\end{aligned}$$

Dabei ist die Jacobi-Matrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{z})$ gegeben durch

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{z}) = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b \cdot \mathbf{Y}(\mathbf{b})$$

$$\mathbf{B}_a := \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|_{(\mathbf{z}, \mathbf{y}(\mathbf{b}; \mathbf{z}))}$$

$$\mathbf{B}_b := \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right|_{(\mathbf{z}, \mathbf{y}(\mathbf{b}; \mathbf{z}))}$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{b}) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{y}(\mathbf{b}; \mathbf{z}).$$

Ein Beispiel, bei dem das Schießverfahren versagt.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' = \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Für $\lambda = 5$ besitzt die zugehörige Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} y'' = \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = z \end{cases}$$

nur für $|z| \leq 0.05$ eine Lösung, die auf dem ganzen Intervall $[0, 1]$ existiert.

Für die tatsächliche Lösung der Randwertwertaufgabe gilt

$$z^* = 0.0457504\dots$$

Ein Beispiel, bei dem die Lösung stark variiert.

Wir betrachten das Randwertproblem

$$y'' = 12y + y', \quad y(0) = y(10) = 1$$

Die allgemeine Lösung der Anfangswertaufgabe kann man explizit berechnen:

$$y(t; z_1, z_2) = \frac{4z_1 - z_2}{7} e^{-3t} + \frac{3z_1 + z_2}{7} e^{4t}$$

Mit den Randwerten $y(0) = y(10) = 1$ folgt

$$z_1^* = y(0) = 1, \quad z_2^* = y'(0) = -3 + 2.9 \dots \cdot 10^{-17}$$

und weiter gilt

$$\begin{aligned} y(10; 1, -3) &= e^{-30} \approx 9.36 \cdot 10^{-14} \\ y(10; 1, -3 + 10^{-10}) &\approx \frac{1}{7} e^{30} \approx 1.53 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

Eine korrekte numerische Berechnung ist damit nahezu unmöglich!

Mehrzielmethode (Multiple Shooting Method).

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) & \text{für } \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0 \end{cases}$$

Kombiniere das einfache Schießverfahren mit einer Intervallunterteilung von $[a, b]$:

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$$

Man nennt die t_i 's auch die **Mehrzielknoten**.

Löse auf jedem Teilintervall (numerisch) das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & t_j \leq t \leq t_{j+1} \\ \mathbf{y}(t_j) &= \mathbf{z}_j \end{aligned}$$

und bezeichne die Lösung mit $\mathbf{y}(t; t_j, \mathbf{z}_j)$, $j = 1, \dots, m - 1$.

Die Mehrzielmethode (Fortsetzung).

Die zusammengesetzte Lösung

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{m-1}) := \begin{cases} \mathbf{y}(t; t_1, \mathbf{z}_1) & : t_1 \leq t < t_2 \\ \mathbf{y}(t; t_2, \mathbf{z}_2) & : t_2 \leq t < t_3 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}(t; t_{m-1}, \mathbf{z}_{m-1}) & : t_{m-1} \leq t < t_m \end{cases}$$

erfüllt genau dann die Randwertaufgabe, falls gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j(\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_{j+1}) &:= \mathbf{y}(t_{j+1}; t_j, \mathbf{z}_j) - \mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{0}, \quad j = 1, 2, \dots, m-2 \\ \mathbf{F}_{m-1}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_{m-1}) &:= \mathbf{r}(\mathbf{z}_1, \mathbf{y}(t_m; t_{m-1}, \mathbf{z}_{m-1})) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu einem Nullstellenproblem für die Funktion

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{m-1})^T : D \rightarrow \mathbb{R}^{(m-1)n}, \quad D \subset \mathbb{R}^{(m-1)n}$$

Zur Lösung verwendet man wieder das gedämpfte Newton-Verfahren.