**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe

# Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 7 (Aufgaben mit Lösungen der Hörsaalübung)

**Aufgabe 25:**

Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1^5 - 4y_1 y_2^2 \,, \\ y_2' &= y_1^2 y_2 - 5y_2^3 \,. \end{aligned}$$

a) Man berechne alle stationären Punkte $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems.

b) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte nach Stabilitätssatz III.

c) Man untersuche das Stabilitätsverhalten aller stationären Punkte mit Hilfe der Methode von Ljapunov, wobei eine Ljapunov-Funktion $V$ in der Form $V(\boldsymbol{y}) = ay_1^2 + by_2^2$ gesucht werden soll.

**Lösung:**

a) Man erhält alle stationären Punkte des autonomen Systems $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ durch Lösen von:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} -3y_1^5 - 4y_1y_2^2 \\ y_1^2y_2 - 5y_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1(3y_1^4 + 4y_2^2) \\ y_1^2y_2 - 5y_2^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Einziger stationärer Punkt ist also $\boldsymbol{y}^* = \mathbf{0}$.

b)

$$\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} -15y_1^4 - 4y_2^2 & -8y_1y_2 \\ 2y_1y_2 & y_1^2 - 15y_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{f}(\mathbf{0})$ lauten $\lambda_{1,2} = 0$. Stabilitätssatz III ist damit nicht anwendbar.

c) Für die Funktion $V(\boldsymbol{y}) = ay_1^2 + by_2^2$ gilt $V(\mathbf{0}) = 0$ und die Bedingung $V(\boldsymbol{y}) > 0$ für $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$ ergibt, dass $a, b > 0$ gelten muss.

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{grad} V(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \rangle &= (2ay_1, 2by_2) \begin{pmatrix} -3y_1^5 - 4y_1y_2^2 \\ y_1^2y_2 - 5y_2^3 \end{pmatrix} \\ &= -6ay_1^6 + y_1^2y_2^2(2b - 8a) - 10by_2^4\,. \end{aligned}$$

Damit ist $\mathrm{grad} V(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) < 0$ für alle $0 < ||\,\boldsymbol{y}\,|| \leq R$ nur erfüllbar, falls $2b - 8a \leq 0$ gilt.

Für $a = 1$ und $b = 4$ erhält man also die folgende strenge Ljapunov-Funktion

$$V(\boldsymbol{y}) = y_1^2 + 4y_2^2\,.$$

Aus Stabilitätssatz IV folgt nun, dass $\boldsymbol{y}^* = 0$ ein asymptotisch stabiler stationärer Punkt ist.

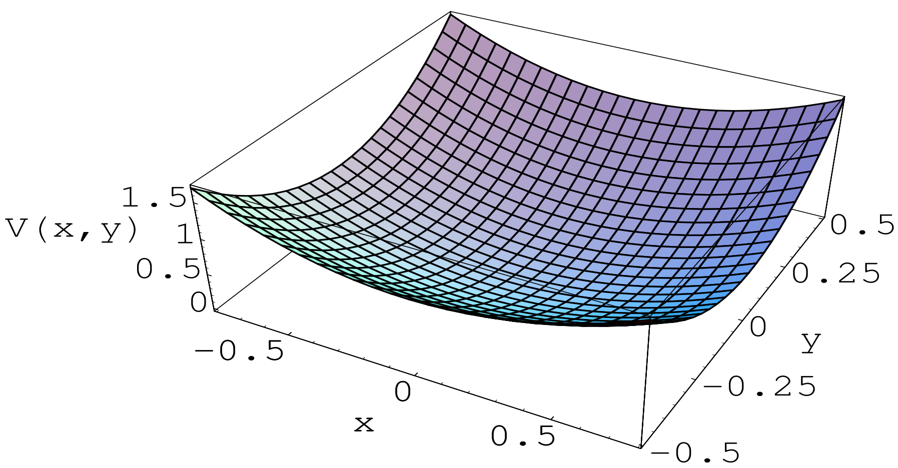


**Bild 25** Ljapunov-Funktion $V(\boldsymbol{y}) = y_1^2 + 4y_2^2$

**Aufgabe 26:**

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{array}{rclcrcl} \dot{y}_1 & = & y_2 + y_3, & \qquad & y_1(0) + e^{-1} \cdot y_1(1) & = & 2, \\ \dot{y}_2 & = & y_1 + y_3, & & y_2(0) + e^{-1} \cdot y_2(1) & = & 2, \\ \dot{y}_3 & = & 2y_3, & & y_3(0) + e^{-1} \cdot y_3(1) & = & 0. \end{array}$$

a) Man gebe die Aufgabe in Matrizenschreibweise an,

b) bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems und

c) löse die Randwertaufgabe.

**Lösung:**

a) Die lineare Randwertaufgabe 1. Ordnung läßt sich mit $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ schreiben als

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=: \boldsymbol{A}} \boldsymbol{y}$$

mit Randbedingungen $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: \boldsymbol{B}_0} \boldsymbol{y}(0) + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}}_{=: \boldsymbol{B}_1} \boldsymbol{y}(1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \boldsymbol{b}}$.

b) Fundamentalsystem:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 1)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

Als zugehörige Eigenvektoren können gewählt werden:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet mit Fundamentalsystem $\boldsymbol{Y}(t)$:

$$\boldsymbol{y}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & e^{t} & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}_{=: \boldsymbol{Y}(t)} \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$$

c) Einsetzen der allgemeinen Lösung in die Randbedingungen führt auf das Gleichungssystem

$$\underbrace{(\boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{Y}(0) + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{Y}(1))}_{\boldsymbol{E}} \mathbf{c} = \boldsymbol{b}.$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{1} & e^{2} \\ -e^{-1} & e^{1} & e^{2} \\ 0 & 0 & e^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+e^{-2} & 2 & 1+e^{1} \\ -1-e^{-2} & 2 & 1+e^{1} \\ 0 & 0 & 1+e^{1} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems

$$(\boldsymbol{E}\,\mathbf{c} =) \begin{pmatrix} 1+e^{-2} & 2 & 1+e^{1} \\ -1-e^{-2} & 2 & 1+e^{1} \\ 0 & 0 & 1+e^{1} \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \; (= \boldsymbol{b})$$

lautet $\mathbf{c} = (0, 1, 0)^T$. Damit wird das Randwertproblem gelöst durch

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 27:**

Man minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^2 16y^2 + (y')^2 - 8yy'\, dt$$

für alle $C^1$-Funktionen $y$ mit $y(0) = 0$ und $y(2) = 1$.

a) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,

b) löse die zugehörige Randwertaufgabe und

c) berechne für die Lösung aus (ii) den Wert des Funktionals $I[y]$.

**Lösung:**

a) Euler-Lagrange-Gleichung für $f(t,y,y') = 16y^2 + (y')^2 - 8yy' = (y'-4y)^2$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = (32y - 8y') - \frac{d}{dt}(2(y') - 8y) \\ &= 32y - 8y' - (2y'' - 8y') = 2(16y - y'') \, . \end{aligned}$$

b) Die resultierende Randwertaufgabe lautet also

$$y'' = 16y \quad \text{mit} \quad y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(2) = 1 \, .$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit $p(\lambda) = \lambda^2 - 16$ lautet

$$y(t) = \tilde{c}_1 e^{4t} + \tilde{c}_2 e^{-4t} = c_1 \sinh 4t + c_2 \cosh 4t \, .$$

Anpassen an die Randbedingungen:

$0 = y(0) = c_1 \sinh 0 + c_2 \cosh 0 = c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$

$1 = y(2) = c_1 \sinh 8 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \dfrac{1}{\sinh 8} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \dfrac{\sinh 4t}{\sinh 8}$

c)

$$\begin{aligned} I\left[\frac{\sinh 4t}{\sinh 8}\right] &= \int_0^2 \left( \frac{4\cosh 4t}{\sinh 8} - \frac{4 \sinh 4t}{\sinh 8} \right)^2 dt \\ &= \frac{16}{\sinh^2 8} \int_0^2 (\cosh 4t - \sinh 4t)^2 \, dt = \frac{16}{\sinh^2 8} \int_0^2 (e^{-4t})^2 \, dt \\ &= \left( -\frac{2}{\sinh^2 8} e^{-8t} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{2 - 2e^{-16}}{\sinh^2 8} = 9.00281 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

**Aufgabe 28:**

Für die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

bestimme man die allgemeine Lösung. Damit berechne man alle Lösungen für folgende Randbedingungen:

a) $y(0) = 0$ und $y'(\pi) = 1$ ,

b) $y(0) + 2y(\pi) = 0$ und $3y(0) + 4y(\pi) = 0$ ,

c) $y'(0) + y'(\pi) = 0$ und $y'(0) - y'(\pi) = 1$ .

unter Verwendung der allgemeinen Lösungsdarstellung der Einzelgleichung und alternativ durch Umschreiben in ein System 1.Ordnung und dann unter Verwendung der Shooting-Matrix.

**Lösung:**

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\quad y'' + 4y = 0 \quad$ lautet:

$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

$$y'(x) = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x\,.$$

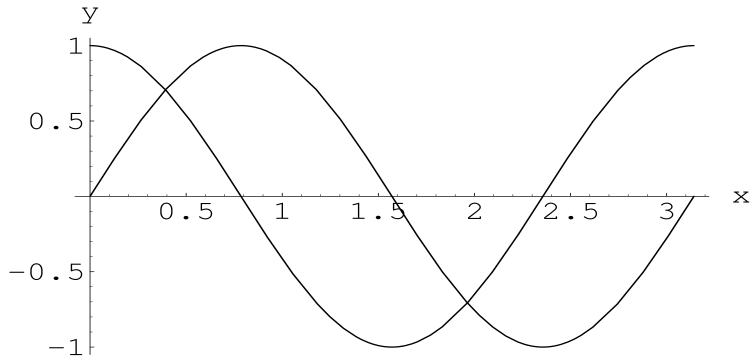


**Bild 28** Fundamentalsystem $\sin 2x\,,\ \cos 2x$

Alternativ als System erster Ordnung geschrieben:

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Y}\,(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}}\,.$$

Dabei ist $\boldsymbol{Y}\,(x)$ Fundamentalsystem. Aus den Randbedingungen erhält man:

a) $y(0) = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = c_2 = 0\,,$

$y'(\pi) = 2c_1 \cos(2\pi) = 1 \;\Rightarrow\; c_1 = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad$ es gibt genau eine Lösung: $\quad y(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

Alternativ als System in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_0} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_\pi} \begin{pmatrix} y(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{d}}$$

Setzt man die allgemeine Lösung in Fundamentalsystemschreibweise in die Randbedingungen ein, so ist zur Berechnung von $\mathbf{c}$ das Gleichungssystem

$$\underbrace{\left(\boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{Y}(0) + \boldsymbol{B}_\pi \boldsymbol{Y}(\pi)\right)}_{\boldsymbol{E}} \mathbf{c} = \boldsymbol{d}$$

zu lösen, mit

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}$ ist regulär und die Lösung der Randwertaufgabe ergibt sich aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $y(0) + 2y(\pi) = c_2 + 2c_2 = 3c_2 = 0\,,$

$3y(0) + 4y(\pi) = 3c_2 + 4c_2 = 7c_2 = 0$

$\Rightarrow$ es gibt unendlich viele Lösungen: $y(x) = c_1 \sin 2x\,,\quad c_1 \in \mathbb{R}$

Alternativ als System in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_0}\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_\pi}\begin{pmatrix} y(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{d}}$$

Setzt man die allgemeine Lösung in Fundamentalsystemschreibweise in die Randbedingungen ein, so ist zur Berechnung von $\mathbf{c}$ das Gleichungssystem

$$\underbrace{(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Y}(0) + \boldsymbol{B}_\pi\boldsymbol{Y}(\pi))}_{\boldsymbol{E}}\,\mathbf{c} = \boldsymbol{d}$$

zu lösen, mit

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}$ ist singulär und die Lösungen der Randwertaufgabe ergeben sich aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $y'(0) + y'(\pi) = 2c_1 + 2c_1 = 4c_1 = 0\,,$

$y'(0) - y'(\pi) = 2c_1 - 2c_1 = 0 \neq 1$

$\Rightarrow$ es gibt keine Lösung

Alternativ als System in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_0}\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}_\pi}\begin{pmatrix} y(\pi) \\ y'(\pi) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{d}}$$

Setzt man die allgemeine Lösung in Fundamentalsystemschreibweise in die Randbedingungen ein, so ist zur Berechnung von $\mathbf{c}$ das Gleichungssystem

$$\underbrace{(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{Y}(0) + \boldsymbol{B}_\pi\boldsymbol{Y}(\pi))}_{\boldsymbol{E}}\,\mathbf{c} = \boldsymbol{d}$$

zu lösen, mit

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}$ ist singulär und $\boldsymbol{d}$ liegt nicht im Spaltenraum von $\boldsymbol{E}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{keine Lösung.}$$

**Aufgabe 29:**

Man bestimme die Greensche Funktion des linearen Randwertproblems zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} y''(t) - \frac{1}{t} y'(t) &= h(t)\,, \quad 1 \le t \le 2 \\ y'(1) = 0\,, \quad y(2) &= 0 \end{aligned}$$

und löse damit die Randwertaufgabe für $h(t) := 2t$.

*Hinweis:*
Die homogene Differentialgleichung besitzt Lösungen der Form $y(t) = t^\alpha$.

**Lösung:**

Der Lösungsansatz $y(t) = t^\alpha$ für die homogene Differentialgleichung

$$y''(t) - \frac{1}{t}y'(t) = 0$$

eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$(\alpha(\alpha-1) - \alpha)t^{\alpha-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(\alpha-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0\,,\ \alpha = 2\,.$$

Damit besitzt die homogene Differentialgleichung das Fundamentalsystem

$$y_1(t) = 1 \quad , \quad y_2(t) = t^2\,.$$

Der Ansatz für die Greensche Funktion lautet:

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (a_1(\tau) + b_1(\tau))y_1(t) + (a_2(\tau) + b_2(\tau))y_2(t) & : \ \tau \le t \\[2ex] (a_1(\tau) - b_1(\tau))y_1(t) + (a_2(\tau) - b_2(\tau))y_2(t) & : \ t \le \tau \end{cases}$$

Stetigkeit und Sprungbedingung in der Ableitung für $t = \tau$ führen auf

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} b_1(t)y_1(t) + b_2(t)y_2(t) & = & b_1(t)\cdot 1 + b_2(t)\cdot t^2 & = & 0 \\[2ex] b_1(t)y_1'(t) + b_2(t)y_2'(t) & = & 2b_2(t)\cdot t & = & \dfrac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad b_1(t) = -\frac{t}{4} \quad , \quad b_2(t) = \frac{1}{4t} \quad .$$

Mit den Randbedingungen $y'(1) = 0,\ y(2) = 0$ werden $a_1$ und $a_2$ berechnet:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} G_t(1,\tau) = (a_1(\tau) - b_1(\tau))y_1'(1) + (a_2(\tau) - b_2(\tau))y_2'(1) & = & 0 \\[2ex] G(2,\tau) = (a_1(\tau) + b_1(\tau))y_1(2) + (a_2(\tau) + b_2(\tau))y_2(2) & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2(a_2(\tau) - b_2(\tau)) & = & 0 \\[2ex] (a_1(\tau) + b_1(\tau)) + 4(a_2(\tau) + b_2(\tau)) & = & 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad a_2(\tau) = b_2(\tau) = \frac{1}{4\tau}\,, \quad a_1(\tau) = -b_1(\tau) - 8b_2(\tau) = \frac{\tau}{4} - \frac{2}{\tau}\,.$$

Damit lautet die Greensche Funktion:

$$G(t,\tau) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\tau} + \dfrac{1}{2\tau}t^2 & : \ \tau \le t \\[2ex] \dfrac{\tau}{2} - \dfrac{2}{\tau} & : \ t \le \tau \end{cases}$$

Mit der nun berechneten Greenschen Funktion und der Inhomogenität $h(t) = 2t$ ergibt sich die Lösung $y(t)$ der Randwertaufgabe folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_1^2 G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau = \int_1^t G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau \int_t^2 G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau \\
&= \int_1^t \left(-\frac{2}{\tau} + \frac{1}{2\tau}t^2\right) 2\tau\,d\tau + \int_t^2 \left(\frac{\tau}{2} - \frac{2}{\tau}\right) 2\tau\,d\tau \\
&= \int_1^t -4 + t^2\,d\tau + \int_t^2 \tau^2 - 4\,d\tau \\
&= (t^2-4)\tau|_1^t + \frac{\tau^3}{3} - 4\tau\Big|_t^2 \\
&= (t^2-4)(t-1) + \frac{2^3 - t^3}{3} - 4(2-t) = \frac{2t^3}{3} - t^2 - \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 30:**

Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randeigenwertaufgabe

$$y'' - 2y = \lambda y \quad \text{mit} \quad y'(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(1) = 0\,.$$

**Lösung:**

Das charakteristische Polynom

$$p(\mu) = \mu^2 - 2 - \lambda = 0$$

besitzt die Nullstellen $\mu = \pm\sqrt{2+\lambda}\,.$

Zu unterscheiden sind jetzt drei Fälle:

a) $2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2:$

Die allgemeine Lösung lautet hier $y(t) = c_1 + c_2 t\,.$

Mit $y'(t) = c_2$ erhält man aus den Randbedingungen das Gleichunssystem $0 = y'(0) = c_2\,,\ 0 = y(1) = c_1\,,$ d.h. $y = 0\,.$ Also ist $\lambda = -2$ kein Eigenwert.

b) $2 + \lambda > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > -2:$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = c_1 e^{t\sqrt{2+\lambda}} + c_2 e^{-t\sqrt{2+\lambda}}\,.$$

Mit $y'(t) = c_1\sqrt{2+\lambda}e^{t\sqrt{2+\lambda}} - c_2\sqrt{2+\lambda}e^{-t\sqrt{2+\lambda}}$ erhält man aus den Randebedingungen das Gleichunssystem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(0) \\ y(1) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2+\lambda} & -\sqrt{2+\lambda} \\ e^{\sqrt{2+\lambda}} & e^{-\sqrt{2+\lambda}} \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = \sqrt{2+\lambda}e^{-\sqrt{2+\lambda}} + e^{\sqrt{2+\lambda}}\sqrt{2+\lambda} = 2\sqrt{2+\lambda}\cosh(\sqrt{2+\lambda}) > 0$$

Damit existiert nur die triviale Lösung $y = 0$ und es gibt für $\lambda > -2$ keine Eigenwerte und Eigenfunktionen.

c) $2 + \lambda < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < -2:$

Die allgemeine komplexe bzw. reelle Lösung lautet

$$y(t) = c_1 e^{t\sqrt{2+\lambda}} + c_2 e^{-t\sqrt{2+\lambda}} = d_1\cos(t\sqrt{-(\lambda+2)}) + d_2\sin(t\sqrt{-(\lambda+2)})$$

mit

$$y'(t) = -d_1\sqrt{-(\lambda+2)}\sin(t\sqrt{-(\lambda+2)}) + d_2\sqrt{-(\lambda+2)}\cos(t\sqrt{-(\lambda+2)})\,.$$

Aus den Randbedingungen ergibt sich

$0 = y'(0) = d_2\sqrt{-(2+\lambda)} \quad \Rightarrow \quad d_2 = 0\,,$

$0 = y(1) = d_1\cos(\sqrt{-(\lambda+2)})$

Da triviale Lösungen keine Eigenwerte und Eigenfunktionen liefern, folgt $d_1 \neq 0$ und $\cos(\sqrt{-(\lambda+2)}) = 0\,.$

Eigenwerte ergeben sich also aus $\sqrt{-(\lambda+2)} = k\pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \lambda_k = -2 - \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}\,, \quad k = 0,1,2\ldots$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen lauten:

$$y_k(t) = d_1\cos\frac{(2k+1)\pi t}{2}\,, \quad d_1 \in \mathbb{R}\,, \quad k = 0,1,2\ldots$$