Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Homogene Anfangswertprobleme für Systeme der Form
$(A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n)$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

werden in Analogie zum skalaren Fall $n = 1$ mit Hilfe der Matrix Exponentialfunktion

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

$A^0 = I$

$A^{\ell+k} = A^\ell \cdot A^k$

durch

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \mathbf{x}_0$$

gelöst.

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Ist $\mathbf{v}$ Hauptvektor zum Eigenwert λ, d.h. gilt

$$(A - \lambda I)^{\sigma} \mathbf{v} = 0,$$

wobei σ die algebraische Vielfachheit von λ bezeichne, so ergibt

$$\mathbf{x}(t) \;=\; e^{At}\mathbf{v} \;=\; e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k \mathbf{v} \;=\; e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\sigma-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k \mathbf{v}$$

die entsprechende Hauptvektorlösung. Dabei ist jeder Eigenvektor $\mathbf{v}$ natürlich auch Hauptvektor (nullter Stufe).

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Berechnung

Eigenschaften von $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

- $e^{A+B} = e^A \cdot e^B \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $AB = BA$

- $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$ erfüllt $e^{A \cdot 0} = I \wedge \frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At}$

- $T \in Gl_n(\mathbb{C})$:

  $\nearrow$ $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar

$$e^{T^{-1}AT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T^{-1}AT)^k}{k!}$$

$$= T^{-1}A\cancel{T}\cancel{T^{-1}}AT \cdots \cancel{T^{-1}}AT$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} T^{-1} \frac{A^k}{k!} T = T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) T$$

- $e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1 A} \cdot e^{t_2 A}$
- $e^{-At} = (e^{At})^{-1}$

Matrix Exponentialfunktion

Berechnung

geg: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Finde $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inv., s.d. $T^{-1}AT$ in Jordanform

d.h. $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$, $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^{At} = T\, e^{T^{-1}ATt}\, T^{-1} = T e^{\begin{pmatrix} J_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & J_k t \end{pmatrix}} T^{-1}$$

$$= T \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_k t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

Was ist e^{Jt} mit J Jordanblock?

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Berechnung

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$$

$$= \lambda I + N \quad \text{mit } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \ldots$$

kommutiert

$(\lambda I) N = N (\lambda I)$

$N^\ell = 0$

(d.h. N ist „nilpotent")

$$e^{Jt} = e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda t I + tN}$$

$$= e^{\lambda t I} \cdot e^{tN} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{t^k}{k!} N^k$$

$$e^{\lambda t I} = e^{\lambda t} \cdot I$$

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{N^k}_{=0 \text{ für } k \geq \ell} = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{t^k}{k!} N^k$$

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Berechnung

$$= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} & \cdots & \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^3}{6} \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiele :

a) $e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= e^{At}$

b) $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = 0$ $\Rightarrow$ $x_1(t) = c_1 + c_2 t$, $x_2(t) = c_2$ allg. Lsg

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Matrix Exponentialfunktion

Berechnung

Matrix Exponentialfunktion

Buch Kap. 6.7

Berechnung

Lineare DGL n-ter Ordnung

Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0$$

Betrachte $\quad y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}}_{y(t)}$

$$\dot{y}_1(t) = \dot{x}(t) = y_2(t)$$
$$\dot{y}_2(t) = \ddot{x}(t) = y_3(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{y}_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t) = y_n(t)$$
$$\dot{y}_n(t) = x^{(n)}(t) = -a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}(t) - \ldots - a_0(t)\, x(t)$$
$$= -a_{n-1}(t)\, y_n(t) \cdots - a_0(t)\, y_1(t)$$

Lineare DGL n-ter Ordnung

Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0$$

$$\dot{Y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ & 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & & \ddots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} Y(t)$$

Lineare DGL n-ter Ordnung

Buch Kap. 6.8

Definition 6.3

Folgt aus der Beziehung

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t) = 0 \text{ auf } [a, b]$$

für n Lösungen $x_1, ..., x_n$ einer homogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0$$

$n-$ter Ordnung das Verschwinden sämtlicher Koeffizienten, also $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$, so heisst $x_1, x_2, ..., x_n$ **Fundamentalsystem** der homogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Wronski–Determinante

Buch Kap. 6.8

Definition 6.4

Seien $x_1, x_2, ..., x_n$ beliebige Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $n-$ter Ordnung, dann heißt

$$W(t) := \det \begin{array}{cccc} Y_1 & Y_2 & & Y_n \end{array}$$

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & & & \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

WRONSKI$-$**Determinante** dieser n Lösungen.

Lösbarkeit DGL n−ter Ordnung

Satz 6.10

Die Funktionen $a_i(t),\ i = 0, 1, ...n-1$, seien stetig auf $[a, b]$.

a) Dann gibt es ein Fundamentalsystem $x_1, ..., x_n$ von

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0$$

und jede Lösung der Differentialgleichung besitzt die Form

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + ... + c_n x_n(t)$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$.

b) Je n Lösungen der homogenen Differentialgleichung bilden ein Fundamentalsystem, wenn ihre WRONSKI−Determinante $W(t)$ nirgends auf $[a, b]$ verschwindet (Gilt $W(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in [a, b]$, so folgt daraus $W(t) \equiv 0$ auf ganz $[a, b]$).

Lösbarkeit DGL n−ter Ordnung

Buch Kap. 6.8

Satz 6.10 (cont.)

c) Sei die Funktion $g(t)$ stetig auf $[a, b]$. Sei $x_p(t)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x = g(t) \ .$$

Ist dann $x_1, ..., x_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung, so sind durch

$$x(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + ... + c_n x_n(t)$$

mit Konstanten $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der linearen inhomogenen Differentialgleichung $n-$ter Ordnung erfasst.

Inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Buch Kap. 6.8

DGL zweiter Ordnung

Die allgemeine Lösung der DGL

$$\ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = g(t)$$

hat die Form

$$x(t) = [C_1 - \int \frac{x_2(t)g(t)}{W(t)} dt]\, x_1(t) + [C_2 + \int \frac{x_1(t)g(t)}{W(t)} dt]\, x_2(t),$$

wobei x_1, x_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bildet. Diese Lösungsdarstellung gilt natürlich auch für konstante Koeffizienten.

DGLen mit konstanten Koeffizienten

Definition 6.5 (charakteristisches Polynom)

Bezeichne

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = g(t)$$

eine lineare Differentialgleichung $n-$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$$

charakteristisches Polynom der homogenen Differentialgleichung (d.h. der DGL mit $g \equiv 0$)
und

$$P(\lambda) = 0$$

heißt die zugehörige **charakteristische Gleichung**.

DGLen mit konstanten Koeffizienten, homogene Lösung

Buch Kap. 6.8

So geht's

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) \dots + a_0 x(t) = 0, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{Y}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A} Y(t)$$

$$p_A(t) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

$$p_A(t) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\ell_k}$$

mit paarw. versch. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

Lösungen

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{\lambda_1 t}, \; t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{\ell_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t}, \; t e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{\ell_2 - 1} e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_k t}, \; t e^{\lambda_k t}, \dots, t^{\ell_k - 1} e^{\lambda_k t} \end{array}}$$