Lösungsmenge inhomogener Systeme

Buch Kap. 6.7

Satz 6.8

Sei $\mathbf{x}_p$ *irgendeine* Lösung des inhomogenen linearen Systems $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ und sei $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ ein Fundamentalsystem und damit $\mathbf{x}_h = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$ die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t)$.

Dann hat jede Lösung des inhomogenen linearen Systems die Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$$

mit Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$, die reell oder komplex sein können.

Lösungsmenge inhomogener Systeme

Beispiel

a)

$M(t)$ Drehmoment

$k > 0$ (hängt von m, ℓ und g ab)

$$\ddot{\varphi}(t) + k \sin(\varphi(t)) = M(t)$$

Annahme: Kleine Auslenkungen $|\varphi|$ klein

$$\Rightarrow \sin(\varphi(t)) \approx \varphi(t) \quad \text{(Taylor)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}(t) + k\,\varphi(t) = M(t)$$

$M(t) \equiv M$ const., $\quad \omega(t)$: Winkelgeschw.

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -k\varphi + M \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \omega_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{k}\,t) \\ \sqrt{k}\cos(\sqrt{k}\,t) \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}\,t) \\ -\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}\,t) \end{pmatrix} \text{ ist}$$

Fundamentalsystem

Variation der Konstanten

Satz 6.9

Durch $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_n$ sei ein Fundamentalsystem von $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t)$ auf $[a, b]$ gegeben. Weiterhin sei

$$X(t) := [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n].$$

Sind die Koomponenten von $\mathbf{g}$ stetig in $[a, b]$, so ist

$$\mathbf{x}_p(t) = X(t) \cdot \mathbf{c}(t) \Rightarrow$$

$$\dot{x}_p(t) = \dot{X}(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t)$$
$$= A(t)X(t)c(t) + X(t)\dot{c}(t)$$
$$= A(t)x_p(t) + \underbrace{X(t)\dot{c}(t)}_{\overset{!}{=} g(t)}$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t).$$

$$\Rightarrow \dot{c}(t) = X(t)^{-1} g(t)$$

Dabei gilt $\mathbf{c}(t) = \int \dot{\mathbf{c}}(t)\,dt$ und $\dot{\mathbf{c}}(t) = (\dot{c}_1(t), \dots, \dot{c}_n(t))^T$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\Rightarrow c(t) = \int X(t)^{-1} g(t)\,dt$$

$$X(t) \cdot \dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{g}(t).$$

Beispiele

$$\begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \dot\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \qquad x_1(t) = \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{\kappa}t) \\ \sqrt{\kappa}\cos(\sqrt{\kappa}t) \end{pmatrix} \; x_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\kappa}t) \\ -\sqrt{\kappa}\sin(\sqrt{\kappa}t) \end{pmatrix}$$

ist Fund.- Syst.

Ansatz für $x_{inh.}(t)$: const. $x_{inh}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

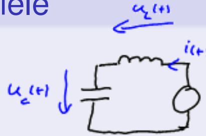
$$\Rightarrow \quad \dot x_{inh}(t) = \begin{pmatrix} \dot\varphi_0 \\ \dot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\mu}{\kappa}$$

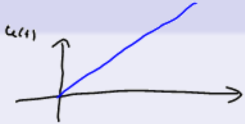
$$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\kappa} \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{\kappa}t) \\ \sqrt{\kappa}\cos(\sqrt{\kappa}t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\kappa}t) \\ \sqrt{\kappa}\sin(\sqrt{\kappa}t) \end{pmatrix}$$

Beispiele

b)



$u(t) = u_0 \cdot t$



$$\dot u(t) + \dot u_L(t) + \dot u_C(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot i(t) + \frac{1}{LC}\, i(t) = -\frac{1}{L} u_0$$

$\dot u(t) = u_0$, $\quad \dot u_L(t) = L\ddot i(t)$, $\quad \dot u_C(t) = \frac{1}{C} i(t)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i(t) \\ \dot i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot i(t) \\ \ddot i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ \dot i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L}u_0 \end{pmatrix}$$

hom. Lsg:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} i_1 \\ \dot i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{LC}}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{pmatrix} \qquad x_2(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \\ -\frac{1}{\sqrt{LC}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{pmatrix}$$

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} i_p \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = \dot x_p(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_p \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L}u_0 \end{pmatrix} \Rightarrow i_p(t) = -C\, u_0$$

$$x(t) = x_p(t) + c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

Beispiele

Pendel revisited: $\ddot{\varphi}(t) + \kappa\,\varphi(t) = \mu(t)$ ← jetzt allg.

$$\begin{pmatrix}\dot\varphi\\ \dot\omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\kappa & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \omega\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \mu(t)\end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix}\sin(\sqrt{\kappa}t) & \cos(\sqrt{\kappa}t)\\ \sqrt{\kappa}\cos(\sqrt{\kappa}t) & -\sqrt{\kappa}\sin(\sqrt{\kappa}t)\end{pmatrix}$$

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix}\sin(\sqrt{\kappa}t) & \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\cos(\sqrt{\kappa}t)\\ \cos(\sqrt{\kappa}t) & -\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa}t)\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}$$

$$c(t) = \int X^{-1}(t)\begin{pmatrix}0\\ \mu(t)\end{pmatrix}dt = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\int \begin{pmatrix}\mu(t)\cos(\sqrt{\kappa}t)\\ -\mu(t)\sin(\sqrt{\kappa}t)\end{pmatrix}dt$$

$$x_p(t) = X(t)\,\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\int \begin{pmatrix}\mu(t)\cos(\sqrt{\kappa}t)\\ -\mu(t)\sin(\sqrt{\kappa}t)\end{pmatrix}dt$$

Systeme mit konstanten Koeffizienten

Buch Kap. 6.7

Satz 6.6

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ ein Eigenwert von A und $\mathbf{v} \neq 0$ ein zu λ gehörender Eigenvektor. Dann ist $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ eine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t).$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}v\right) = \lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}(\lambda v) = e^{\lambda t}(Av) = A(e^{\lambda t}v) = Ax(t)$$

Hat die Matrix A n voneinander verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit dazugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, dann bilden die Lösungen $\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{x}_n(t) = e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$ ein Fundamentalsystem und durch die Linearkombinationen

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n$$

sind sämtliche Lösungen von $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ gegeben.

Systeme mit konstanten Koeffizienten

Buch Kap. 6.7

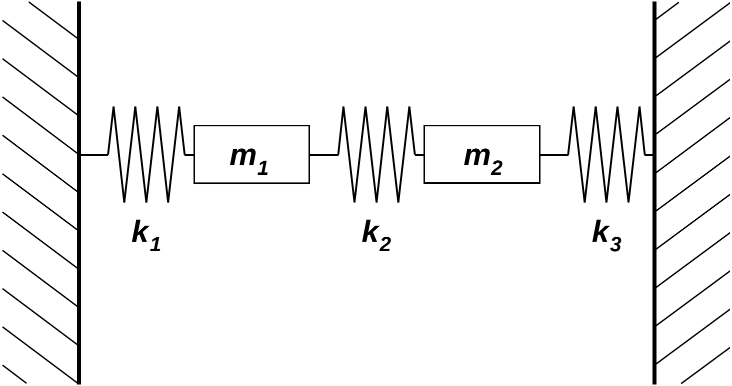


Abbildung 6.8: Zwei-Massen-Schwinger

Systeme mit konstanten Koeffizienten

Buch Kap. 6.7

Beispiel

Pendel revolution $\begin{pmatrix} \dot\varphi \\ \dot\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix}$

EWe: $\lambda^2 + k = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{k}$

zug. EVen: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{k} \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{k} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A v_1 = i\sqrt{k}\, v_1$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = e^{i\sqrt{k}t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}t) + i\sin(\sqrt{k}t) \\ -\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}t) + i\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}t) \end{pmatrix}$$

$$x_2(t) = e^{-i\sqrt{k}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}t) - i\sin(\sqrt{k}t) \\ -\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}t) - i\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}t) \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge homogener Systeme

Buch Kap. 6.7

$X(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$

Satz 6.7

Sei λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit der algebraischen Vielfachheit σ und $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_\sigma$ linear unabhängige Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda I)^\sigma \, \mathbf{v} = \mathbf{0}\,,$$

(sogenannte Hauptvektoren nullter bis $(\sigma - 1)-$ter Stufe), dann sind

$$\mathbf{x}_k = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j \, \mathbf{v}_k \,, \quad k = 1, \ldots, \sigma,$$

linear unabhängige Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t).$$