Lineare DGLen, Ansätze für $p \equiv \text{const.}$

Buch Kap. 6.5

$X(t) = X_{hom}(t) + X_{inh}(t)$

Lsg von $\dot{x}(t)+px(t)=0$ partikuläre Lösung

Für

$$\dot{x}(t) + px(t) = q(t)$$

liefern die folgenden Ansätze partikuläre Lösungen: $c \cdot e^{-pt}$

$1+t^2$

Inhomogenität q	Ansatz für x_{inh}
$\sum_{k=1}^{m} a_k t^k$	$\sum_{k=1}^{m} A_k t^k$
$a_1 e^{at}$	$A_1 e^{at}$ für $a \neq -p$
$a_1 e^{at}$	$tA_1 e^{at}$ für $a = -p$
$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$	$A \sin(\omega t - B)$

Summen und Produkte der genannten Inhomogenitäten bedingen entsprechende Ansätze für x_{inh}.

Lineare DGLen, Variation der Konstanten

Buch Kap. 6.5

Beispiele

a) $\dot{x}(t) + 2x(t) = 1 + t^2$

$\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$

Ziel: bestimme allg. Lsg

Wir wissen: $x(t) = x_{hom}(t) + x_{inh}(t)$

$x_{hom}(t) = C e^{-2t}$

Ansatz: $x_{inh}(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$

$\dot{x}_{inh}(t) + 2x_{inh}(t) = 1 + t^2$

$\Rightarrow A_1 + 2A_2 t + 2A_0 + 2A_1 t + 2A_2 t^2 = 1 + t^2$

$A_1 + 2A_0 + t(2A_1 + 2A_2) + 2A_2 t^2 = 1 + t^2 \Rightarrow$

Koeff.-vergl.

$1 = 2A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}$

$0 = A_1 + A_2 \qquad A_1 = -\frac{1}{2}$

$1 = A_1 + 2A_0 \qquad A_0 = \frac{3}{4}$

Lineare DGLen, Variation der Konstanten

Buch Kap. 6.5

Beispiele

$x_{inh}(t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2$

Probe: $\dot{x}_{inh}(t) + 2x_{inh}(t) = -\frac{1}{2} + t + \frac{3}{2} - t + t^2$
$= 1 + t^2$ ✓

Allg Lsg: $x(t) = x_{hom}(t) + x_{inh}(t) = Ce^{-2t} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2$

---

b) $\dot{x}(t) + 2x(t) = e^t$, $x(t) = x_{hom}(t) + x_{inh}(t) = Ce^{-2t} + x_{inh}(t)$

Ansatz: $x_{inh}(t) = a_1 e^t \Rightarrow \dot{x}_{inh}(t) + 2X_{inh}(t) = e^t$

$\Rightarrow a_1 e^t + 2a_1 e^t = e^t \Rightarrow 3a_1 = 1$

$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$

Probe: $\dot{x}_{inh}(t) + 2x_{inh}(t) = \frac{1}{3}e^t + 2\frac{1}{3}e^t = e^t$

Allg. Lsg: $x(t) = Ce^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$

Lineare DGLen, Variation der Konstanten

Buch Kap. 6.5

Beispiele

c) $\dot{x}(t) + 2x(t) = e^{-2t}$

Ansatz: $x_{inh}(t) = A_1 \cdot t\, e^{-2t}$

$$\dot{x}_{inh}(t) + 2x_{inh}(t) = e^{-2t}$$

$$A_1\left(e^{-2t} - 2t e^{-2t}\right) + 2A_1 t\, e^{-2t} = e^{-2t}$$

$$\underbrace{e^{-2t}\left(t(-2A_1 + 2A_1) + A_1\right)}_{= A_1 e^{-2t}} = e^{-2t} \Rightarrow \qquad A_1 = 1$$

$$x_{inh}(t) = t\, e^{-2t} \qquad \Rightarrow \quad x(t) = c\, e^{-2t} + t\, e^{-2t}$$

Probe: $\dot{x}(t) + 2x(t) = \cancel{-2c\, e^{-2t}} + e^{-2t} \cancel{-2t\, e^{-2t}} \cancel{+2c\, e^{-2t}} \cancel{+2t\, e^{-2t}}$
$= e^{-2t}$

Lineare DGL Systeme erster Ordnung

Buch Kap. 6.7

Satz 6.2

Die Elemente der Matrix $A(t)$, also die Funktionen $a_{ij}(t)$ und die Komponenten von $\mathbf{g}(t)$ seien stetig im Intervall $[a, b]$.
Dann hat das System $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$ mindestens eine Lösung.
Sei $t_0 \in [a, b]$ und $(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})^T$ beliebig vorgegeben. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \ ,$$

genau eine Lösung auf ganz $[a, b]$.

Lineare DGL Systeme erster Ordnung, homogene Systeme

Buch Kap. 6.7

Satz 6.3

Sind die Elemente der Matrix $A(t)$, also die Funktionen $a_{ij}(t)$, in $[a,b]$ stetig, dann besitzt das homogene System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t)$$

auf $[a,b]$ genau n linear unabhängige Lösungen.

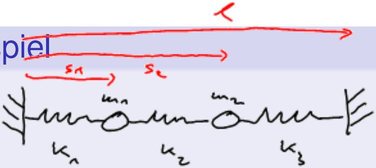
Definition

Ein solches System $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ von linear unabhängigen Lösungen heißt *Fundamentalsystem* und jedes $\mathbf{x}_i$ *Fundamentallösung*.

Lineare DGL Systeme erster Ordnung, homogene Systeme

Buch Kap. 6.7

Beispiel



$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} s_1 \\ v_1 \\ s_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ +\frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2+k_3}{m_2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ v_1 \\ s_2 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\ell k_3}{m_2} \end{pmatrix}$$

Kraftbilanzen:

an m_1:

$$m_1 \ddot{s}_1 = -k_1 s_1 + k_2 (s_2 - s_1)$$

an m_2:

$$m_2 \ddot{s}_2 = -(s_2 - s_1) k_2 + (\ell - s_2) k_3$$

$$\dot{s}_1(t) = v_1(t) = v_1$$

$$\dot{v}_1(t) = -\frac{k_1}{m_1} s_1 + \frac{k_2}{m_1}(s_2 - s_1) = \left(-\frac{k_1}{m_1} - \frac{k_2}{m_1}\right) s_1 + \frac{k_2}{m_1} s_2$$

$$\dot{s}_2(t) = v_2(t) = + v_2$$

$$\dot{v}_2(t) = -(s_2 - s_1)\frac{k_2}{m_2} + (\ell - s_2)\frac{k_3}{m_2} = +\frac{k_2}{m_2} s_1 + \left(-\frac{k_2}{m_2} - \frac{k_3}{m_2}\right) s_2 + \frac{\ell k_3}{m_2}$$

Lineare DGL Systeme erster Ordnung, homogene Systeme

Buch Kap. 6.7

Definition 6.2

Bezeichnen $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,. . . , $\mathbf{x}_n$ Lösungen des Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t)$$

$\in \mathbb{R}^{n \times n}$

und bezeichne $X(t)$ die Matrix mit Spalten $\mathbf{x}_i(t), i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$W(t) := \det\ X(t)$$

WRONSKI–Determinante.

Überlegungen zur Wronski-Determinanten Buch Kap. 6.7

Wronski-Determinante

$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ $\qquad \dot{x}_i(t) = A(t)\, x_i(t)$

$$Z(t) = X(t)^T = (z_1(t) \cdots z_n(t)) = (z_{ij}(t))$$

Spaltenvektor $\in \mathbb{R}^n$

$$\dot{z}_{ij}(t) = \dot{x}_{ji}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_{jk}(t)\, x_{ki}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_{jk}(t)\, z_{ik}(t)$$

$$\dot{z}_j(t) = \sum_{k=0}^{n} a_{jk}(t)\, z_k(t)$$

Zwischenbemerkung

$M : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$ diff'bar

$M(t) = (m_1(t) \dots m_n(t))$

$$\frac{d}{dt} \det(M(t)) = \det(\dot{m}_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t))$$
$$+ \det(m_1(t), \dot{m}_2(t), m_3(t), \dots, m_n(t))$$
$$+ \dots + \det(m_1(t), m_2(t), \dots, m_{n-1}(t), \dot{m}_n(t))$$

$$\frac{d}{dt} W(t) = \frac{d}{dt} \det(X(t)) = \frac{d}{dt} \det(Z(t))$$

$$= \frac{d}{dt} \det(z_1(t), \dots, z_n(t)) = \det(\dot{z}_1, z_2, \dots, z_n) + \dots + \det(z_1, \dots, z_{n-1}, \dot{z}_n)$$

$$= \det\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{1k} z_k, z_2, \dots, z_n\Big) + \dots + \det\Big(z_1, \dots, z_{n-1}, \sum_{k=0}^{n} a_{nk} z_k\Big)$$

Überlegungen zur Wronski-Determinanten Buch Kap. 6.7

Wronski-Determinante

$$= \sum_{k=0}^{n} a_{1k} \underbrace{\det(z_k, z_2, \ldots, z_n)}_{= \delta_{1k} \cdot \det Z = \delta_{1k} W} + \ldots + \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \underbrace{\det(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_k)}_{= \delta_{nk} W}$$

$$= a_{11}(t) W(t) + a_{22}(t) W(t) + \ldots + a_{nn}(t) W(t)$$

$$= (a_{11}(t) + \ldots + a_{nn}(t)) W(t) = \mathrm{Spur}(A(t)) W(t)$$

Zusammenfassend: $\frac{d}{dt} W(t) = \mathrm{Spur}(A(t)) W(t)$

$$\Rightarrow \quad W(t) = C e^{\int_{a}^{t} \mathrm{Spur}(A(\tau)) d\tau}$$

Wronski Test

Buch Kap. 6.7

Satz 6.4

Seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ Lösungen von

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\,\mathbf{x}(t)$$

auf dem Intervall $[a, b]$. Sind die Elemente von $A(t)$ auf $[a, b]$ stetig, so gilt

a) $W(t) \equiv 0$ oder $W(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$.

b) Die Lösungen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$ bilden ein Fundamentalsystem auf $[a, b]$ genau dann, wenn $W(t) \neq 0$ ist.