DGLen mit trennbaren Variablen

Buch Kap. 6.4

Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen

Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}(t) = \frac{g(t)}{h(x(t))}$$

mit

- $g : I \to \mathbb{R}$,
- $h : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Was gehört dazu, was nicht?

- „homogene skalare lineare DGln" $\dot{x}(t) = a(t)\, x(t) = \frac{a(t)}{\frac{1}{x(t)}}$; $a : I \to \mathbb{R}$
- „autonome Systeme" $\dot{x}(t) = f(x(t)) = \frac{1}{\frac{1}{f(x(t))}}$ (Bsp: $\dot{x}(t) = x^2(t)$)
- $\dot{x}(t) = x(t) + t$
- Systeme von DGln ($x(t) \in \mathbb{R}^n, n > 1$)
- DGln höherer Ordnung

DGLen mit trennbaren Variablen

Buch Kap. 6.4

$$\int_{t_0}^{t} h(x(t))\,\dot{x}(t)\,dt = \int_{x(t_0)}^{x(t)} h(x)\,dx$$

Lösung einer Differentialgleichung mit trennbaren Veränderlichen

1) Schreibe die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \frac{g(t)}{h(x(t))}$ in der Form $h(x)(t))\,\dot{x}(t) = g(t)$ bzw. $h(x)\,dx = g(t)\,dt$.
2) Integriere die linke Seite bezüglich x und die rechte Seite bezüglich t.
3) Falls möglich, löse die dadurch entstehende Gleichung

$$H(x) = G(t) + C$$

nach x auf. Ansonsten ist die Lösung $x(t)$ in impliziter Form gegeben.

$$\int_{t_0}^{t} h(x(\tau))\,\dot{x}(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{x(t_0)}^{x(t)} h(x)\,dx$$

DGLen mit trennbaren Variablen

Buch Kap. 6.4

Beispiele

$\dot{x}(t) = t \cdot x(t) \qquad (g(t) = t\,,\ h(x) = \frac{1}{x})$

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = t\,dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int t\,dt \quad \Rightarrow \quad \log|x| = \frac{1}{2}t^2 + c$$

$$|x| = e^{\frac{1}{2}t^2+c} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm \underline{e^{\frac{1}{2}t^2+c}} = e^{\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} \underbrace{e^{c+\frac{1}{2}t_0^2}}_{=x_0}$$

Probe:

(i) $x(t) = e^{\frac{1}{2}t^2+c} \qquad \dot{x}(t) = t\, e^{\frac{1}{2}t^2+c} = t\,x(t)$

(ii) $x(t) = -e^{\frac{1}{2}t^2+c} \qquad \dot{x}(t) = -t\, e^{\frac{1}{2}t^2+c} = t\,x(t)$

DGLen mit trennbaren Variablen

Beispiele

AWP : $\dot{x}(t) = t\, x(t) \qquad x(t_0) = x_0$

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = t \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(\tau)}{x(\tau)}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \tau\, d\tau = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2$$

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{x}\, dx = \log|x(t)| - \log|x_0|$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$\log|x(t)| = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2 + \log|x_0| \Rightarrow |x(t)| = e^{\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) + \log|x_0|}$$

$$= e^{\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} \underbrace{e^{\log|x_0|}}_{=|x_0|}$$

$$= \underbrace{e^{\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)}}_{>0} |x_0| \quad \wedge \quad x(t_0) = x_0$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = e^{\frac{1}{2}(t^2-t_0^2)} x_0}$$

DGLen mit trennbaren Variablen

Beachte: Wenn $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x(t_0) = x_0$ mit $f(x_0) = 0$,
dann ist $x(t) \equiv x_0$ eine Lsg.! (Gleichgewichtslösung)

Beispiele

a) $\dot{x}(t) = x^2(t) = \frac{1}{\frac{1}{x(t)^2}}$, $x(t_0) = x_0$

$$\frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} = 1 \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{t_0}^{t} 1\,d\tau = t - t_0$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x_0}^{x(t)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t - t_0 \Rightarrow \frac{1}{x_0} - t + t_0 = \frac{1}{x(t)} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t + t_0} = \frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0}$$

Probe: $x(t_0) = \frac{x_0}{1 - (t_0 - t_0)x_0} = x_0$ ✓

$$\dot{x}(t) = \frac{-(-x_0)x_0}{(1 - (t - t_0)x_0)^2} = \frac{x_0^2}{(1 - (t - t_0)x_0)^2} = \left(\frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0}\right)^2 = x(t)^2$$

Beachte: Das ist auch eine Lsg, wenn $x_0 = 0$.

DGLen mit trennbaren Variablen, Beispiel 1 Buch Kap. 6.4

Betrachte für $x > 0$ bzw. $x < 0$

$$\dot{x}(t) = t\,x\ ,$$

Schreibe

$$\frac{dx}{x} = t\,dt$$

und integriere die linke Seite bezüglich x, die rechte bezüglich t und erhalten

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + C_0\ , \quad \text{also} \quad |x| = e^{\frac{t^2}{2}+C_0} = e^{C_0}\,e^{\frac{t^2}{2}}\ .$$

Damit folgt $x(t) = \pm e^{C_0}\,e^{\frac{t^2}{2}} = Ce^{\frac{t^2}{2}}$ $(C \neq 0)$. Für $C = 0$ ergibt sich die zunächst ausgeschlossene Lösung $x \equiv 0$.

DGLen mit trennbaren Variablen, Beispiel 2

Betrachte

$$\dot{x}(t) = \sin t \cos x,$$

deren Richtungsfeld wir in Abb. 6.1 dargestellt haben.

Um die Gleichung durch $\cos x$ dividieren zu können, müssen wir $\cos x \neq 0$ bzw. $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, fordern. Diese Forderung bedeutet, dass wir die konstanten Lösungen $x(t) \equiv (k + \frac{1}{2})\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, der Differentialgleichung nicht mit der Methode der Trennung der Veränderlichen bestimmen können, was ja auch nicht nötig ist.

Es ergibt sich

$$\frac{\dot{x}}{\cos x} = \sin t \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sin t \; dt \; .$$

Integration ergibt $\ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| = -\cos t + C_0$ und damit

$$x(t) = 2\arctan(Ce^{-\cos t}) - \frac{\pi}{2} \qquad (C \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

DGLen mit trennbaren Variablen, chemische Reaktion

Buch Kap. 6.4

Chemische Reaktion erster Ordnung (Sättigungskonzentration c_0 und Reaktionskonstante $k > 0$):

$$\dot{x}(t) = k(c_0 - x(t)).$$

Mit $g(t) = k = \text{const}$ und $h(x) = \frac{1}{c_0 - x}$ ergibt sich

$$= c_0 - (c_0 - x_0)\, e^{k(t_0 - t)}$$

$$\frac{dx}{c_0 - x} = k\, dt\,.$$

Nach Integration

$$\int \frac{dx}{c_0 - x} = k \int dt \;+\; C\,, \quad \text{also} \quad -\ln|c_0 - x| = k\,t + C\,.$$

Auflösung nach x ergibt

$$|c_0 - x| = e^{-k\,t - C} = e^{-C}\, e^{-k\,t} \quad \text{bzw.} \quad c_0 - x = \pm e^{-C}\, e^{-k\,t} = C_1 e^{-k\,t}$$

und damit die allgemeine Lösung $\quad x(t_0) = c_0 - C_1 e^{-kt_0} = x_0 \Rightarrow C_1 = (c_0 - x_0)\, e^{kt_0}$

$$x(t) = c_0 - C_1 e^{-k\,t} = c_0 - (c_0 - x_0)\, e^{kt_0}\, e^{-kt}\,.$$

DGLen mit trennbaren Variablen

Buch Kap. 6.4

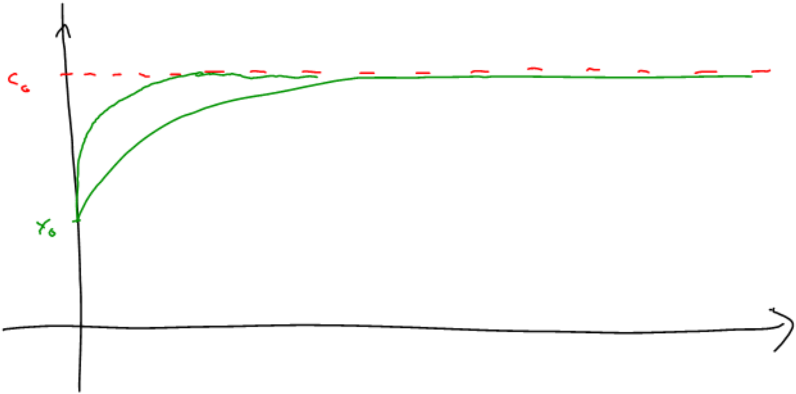


Abbildung Chemische Reaktion erster Ordnung

DGLen mit trennbaren Variablen

Beispiel: $\dot{x}(t) = tx(t)^2$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{t}{x^{-2}(t)}$$

$$\frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} = t \quad \Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x(t)} x^{-2}\,dx = \int_{t_0}^{t} \tau\, d\tau = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} x^{-2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{x_0}^{x(t)} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{2}t_0^2 - \frac{1}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \frac{1}{2}t_0^2 - \frac{1}{2}t^2} = \frac{x_0}{1 + \frac{x_0}{2}(t_0^2 - t^2)}$$

Beachte: Lsg hat Pol bei $t_0^2 - t^2 = -\frac{2}{x_0} \Rightarrow t^2 = t_0^2 + \frac{2}{x_0} \Rightarrow t = \pm\sqrt{t_0^2 + \frac{2}{x_0}}$

Beispiele von DGLen erster Ordnung

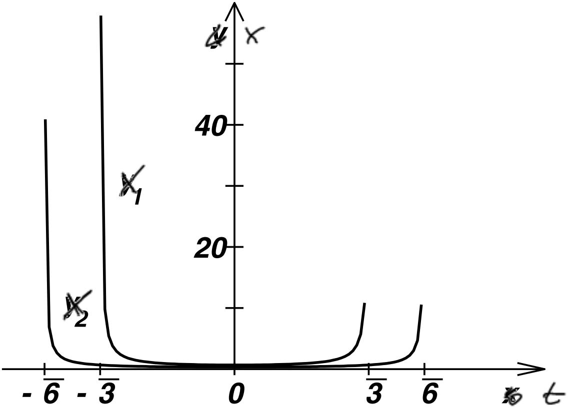


Abbildung 6.3: $\dot{x}(t) = tx(t)^2$ hat Lösungsschar $x(t) = \frac{1}{C - t^2/2}$ mit $C = \frac{1}{x_0} + \frac{t_0^2}{2}$, falls (t_0, x_0) den Anfangswert bezeichnet. Dargestellt sind die Lösungen x_1 und x_2 der Differentialgleichung für $(t_0, x_0) = (1, 1)$, d.h. $C = 1,5$, und $(t_0, x_0) = (2, 1)$, d.h. $C = 3$.

Lineare DGLen

Lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)\ , \tag{5}$$

heißt lineare Differentialgleichung (in Normalform).
Die Differentialgleichung (5) heißt homogen linear, falls $q(\cdot) = 0$, anderenfalls inhomogen linear.

$$|x(t)| = e^{C_0} e^{-P(t)} \quad \text{bzw.} \quad x(t) = C\, e^{-P(t)} \ \ (C \in \mathbb{R},\ C \neq 0)$$

ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, wobei $P(t)$ Stammfunktion von $p(t)$ ist, d.h. $P(t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau$. Für $C = 0$ folgt $x(t) \equiv 0$.

Lineare DGLen, Variation der Konstanten

Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

Ansatz für Lösung homogener Gleichung

$$x(t) = C(t)e^{-P(t)}.$$

Einsetzen in $\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)$ ergibt

$$\dot{C}(t)e^{-P(t)} - C(t)p(t)e^{-P(t)} + p(t)C(t)e^{-P(t)} = q(t)\ .$$

Daraus folgt

$$\dot{C}(t)e^{-P(t)} = q(t) \Longrightarrow \dot{C}(t) = q(t)e^{P(t)} \Longrightarrow C(t) = \int_{x_0}^{x} q(\tau)e^{P(\tau)}\, d\tau + C_1$$

mit einer beliebige Konstanten $C_1 \in \mathbb{R}$.

Lineare DGLen, Variation der Konstanten

Buch Kap. 6.5

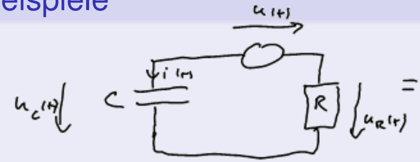
Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

Damit gilt

$$x(t) = C_1 e^{-P(t)} + e^{-P(t)} \int_{t_0}^{t} q(\tau) e^{P(\tau)}\, d\tau =: x_{hom}(t) + x_{inh}(t)\,.$$

$x(t) = x_{hom}(t) + x_{inh}(t)$ erfüllt für jedes $C_1 \in \mathbb{R}$ die inhomogene Gleichung.

Beispiele



$$\Rightarrow \quad u_c(t) = u(t) + u_R(t)$$
$$= u(t) - R\,i(t)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{C\dot{u}_c(t)}_{i_c(t)} = C\dot{u}(t) - CR\,\dot{i}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{i}(t) + \frac{1}{RC}\,i(t) = \underbrace{\frac{1}{R}\,\dot{u}(t)}_{\text{gegeben}}$$