Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Beispiele

Anwendungsfelder gewöhnlicher Differentialgleichungen

- elektrische Analogschaltungen (RLC-Netzwerke)

  bspw 

- Mehrkörperdynamik
- chemische Reaktionskinetik
- Populationsdynamik
- Fahrzeugdynamik

Beispiele (partielle Differentialgleichungen)

Weitere Typen von Differentialgleichungen (nicht gewöhnlich)

a) $$\frac{\partial}{\partial t} T(t,x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T(t,x_1,x_2,x_3) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} T(t,x_1,x_2,x_3) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} T(t,x_1,x_2,x_3)$$ „Wärmeleitungsgleichung"

b) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} s(t,x)$$ „Wellengleichung"

„schwingende Saite"

c) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t,x) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} s(t,x)$$ „Balkenbiegungsgleichung"

d) „Maxwell-Gleichung"

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t,x) = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{rot} B(t,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t,x) = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} E(t,x)$$

Richtungsfelder

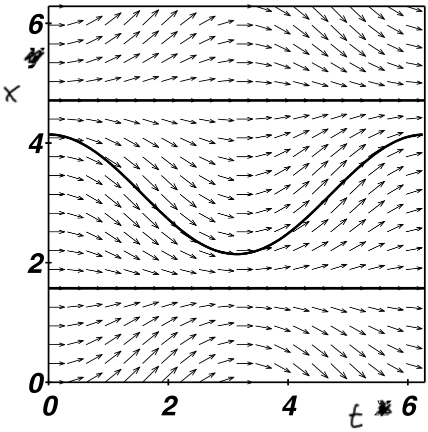


Abbildung 6.1: Richtungsfeld der Differentialgleichung
$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sin(t)\cos(\mathbf{x}(t))$

Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Seien $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $I \subset$ R ein Intervall und sei

$$f : I \times U_0 \times \cdots U_{n-1} \times \mathbb{R}^n$$

eine Funktion.

Eine n-mal differenzierbare Funktion $\mathbf{x} : J \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung von

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)), \tag{1}$$

wenn $J \subset I$ ein Intervall ist, für alle $t \in J$ gilt

$$\mathbf{x}(t) \in U_0,\ ...,\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t) \in U_{n-1},$$

und (1) gilt für alle $t \in J$.

Allgemeine Begriffe

Buch Kap. 6.2

Lösung eines Anfangswertproblems

Seien $U_0, U_1, \ldots, U_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $I \subset$ ein Intervall, sei $t_0 \in I$, sei

$$f : I \times U_0 \times \cdots U_{n-1} \times \mathbb{R}^n$$

eine Funktion, und seien $\mathbf{x}_0 \in U_0$,..., $\mathbf{x}_{n-1} \in U_{n-1}$.
Eine n-mal differenzierbare Funktion $\mathbf{x} : J \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung des Angangswertproblems

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n)}(t) &= f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t_0) = \mathbf{x}_{n-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

wenn $J \subset I$ ein Intervall mit $J \subset I$, für alle $t \in J$ gilt

$$\mathbf{x}(t) \in U_0,\ ...,\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t) \in U_{n-1},$$

und (2) gilt für alle $t \in J$.

Transformation auf erste Ordnung

Differentialgleichung erster Ordnung

Betrachte das Anfangswertproblem

$\dot{y}_n = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(n)}(t) &= \underline{f(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t))}, \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t_0) = \mathbf{x}_{n-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

und setze

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n-1}(t) \\ \mathbf{y}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(n-1)}(t) \\ \mathbf{x}^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_2(t) \\ \mathbf{y}_3(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n(t) \\ f(t, \mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \mathbf{y}_3(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)) \end{pmatrix}.$$

Transformation auf erste Ordnung

Buch Kap. 6.2

Beispiele

Pendel $\qquad \ddot{\varphi}(t) = \frac{g}{\ell} \sin(\varphi(t))$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

$\omega(t)$ „Winkelgeschwindigkeit"

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega(t) \\ \frac{g}{\ell} \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$$

Existenz- und Eindeutigkeit

Buch Kap. 6.3

Definition (LIPSCHITZ-Bedingung)

Gegeben sei eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}^n$ mit $D_f := I \times U$, wobei

- $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.
- $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

Dann sagt man, *f erfüllt die LIPSCHITZ-Bedingung*, wenn für jedes $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D_f$, eine offene Menge $U_{(t_0,\mathbf{x}_0)} \subset D_f$ mit $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U_{(t_0,\mathbf{x}_0)}$ existiert, so dass

$$|f(t, \mathbf{x}_1) - f(t, \mathbf{x}_2)| \leq L|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

für alle $(t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in U_{(t_0,\mathbf{x}_0)}$.

Existenz- und Eindeutigkeit

Buch Kap. 6.3

Definition (Lipschitz-Bedingung)

Gegeben sei eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}^n$ mit $D_f := I \times U$, wobei

- $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.
- $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

Dann sagt man, *f erfüllt die Lipschitz-Bedingung*, wenn für jedes $(t_0, \mathbf{x}_0) \in D_f$, eine offene Menge $U_{(t_0,\mathbf{x}_0)} \subset D_f$ mit $(t_0, \mathbf{x}_0) \in U_{(t_0,\mathbf{x}_0)}$ existiert, so dass

$$|f(t, \mathbf{x}_1) - f(t, \mathbf{x}_2)| \leq L|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

für alle $(t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in U_{(t_0,\mathbf{x}_0)}$.

Satz

Wenn die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}^n$ mit $D_f := I \times U$ stetig partiell differenzierbar ist, dann erfüllt sie die Lipschitz-Bedingung.

Existenz- und Eindeutigkeit

Buch Kap. 6.3

Satz 6.1

Das Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(t, \mathbf{x}(t)),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

mit $(\mathbf{x}_0, t_0) \in D_f := U \times I$ besitzt mindestens eine Lösung, falls $f(\cdot, \cdot)$ auf D_f stetig ist.
Erfüllt die Funktion die LIPSCHITZ–Bedingung, dann ist die Lösung eindeutig.

Existenz- und Eindeutigkeit

Buch Kap. 6.3

Beispiele

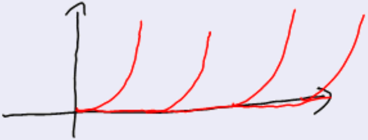
a) fieses Beispiel $\dot{x}(t) = \sqrt{x(t)}$, $x(0) = 0$

(i) $x(t) = 0$ ist Lsg

(ii) $x(t) = \frac{1}{4}t^2$ ist auch Lsg

(iii) $T > 0$, betrachte

$$x(t) = \begin{cases} 0 : & t \in [0, T) \\ \frac{1}{4}(t-T)^2 : & t \geq T \end{cases}$$



Beachte $f(x) = \sqrt{x}$ erfüllt NICHT die Lipschitzbedingung !!!!

$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| < L\,|x - 0|$ geht nicht

Existenz- und Eindeutigkeit

Beispiele

b) $\dot{x}(t) = \underbrace{x^2(t)}_{=f(t,x(t))}$, $x(t_0) = x_0$

NR

$t_0 - t = -\frac{1}{x_0}$

$t = t_0 + \frac{1}{x_0}$

$x(t) = \frac{x_0}{1+(t_0-t)x_0}$ ist Lsg, denn

$x(t_0) = \frac{x_0}{1+(t_0-t_0)x_0} = x_0$

$\dot{x}(t) = -\frac{(-x_0)\cdot x_0}{(1+(t_0-t)x_0)^2} = \left(\frac{x_0}{1+(t_0-t)x_0}\right)^2 = x(t)^2$

Beachte: $x(t)$ ist nur bis zum Punkt $t_0 + \frac{1}{x_0}$ definiert,

also $J = (-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0})$