Stabilität

Was ist bei $f(\bar{x}) = 0$?
$\dot{x}(t) = f(x(t))$

$y(t) := x(t) - \bar{x}$

Wir betrachten die DGL

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \text{mit } f(0) = 0.$$

$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t))$
$= \underbrace{f(y(t) + \bar{x})}_{\tilde{f}(y(t))}$
$\Rightarrow \tilde{f}(0) = f(\bar{x}) = 0$

Definition

Eine stetig differenzierbare Funktion $V : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt Ljapunov–Funktion auf $K_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| < r\} \subset D$ für $\dot{x}(t) = f(x(t))$, falls gilt

a) $V(0) = 0$ und

$$V(x) > 0 \text{ für } x \in K_r(\mathbf{0}) \setminus \{0\}$$

b)

$$\nabla V \cdot f(x) \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in K_r(0)$$

Gilt in b) sogar

b')

$$\nabla V \cdot f(x) < 0 \qquad \text{für alle } x \in K_r(0)$$

so nennt man $V(\cdot)$ eine strenge Ljapunov–Funktion.

Stabilität

Satz (Stabilitätssatz mit Ljapunov–Funktionen)

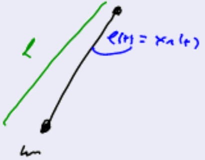
1) Existiert eine Ljapunov–Funktion $V(x)$ von $\dot{x}(t) = f(x(t))$, so ist $\bar{x} = 0$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

2) Ist $V(x)$ zudem eine strenge Ljapunov–Funktion von $\dot{x}(t) = f(x(t))$, so ist $\bar{x} = 0$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Pendel (ungedämpft)



$g > 0$

$m > 0$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_1(t)) \end{pmatrix}$$

Betrachte Gleichgewicht $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ein wenig Physik:

potenzielle Energie: $E_{pot}(t) = m \cdot \ell\,(1 - \cos x_1(t))\, g$

kinetische Energie: $E_{kin}(t) = \frac{1}{2} m\, \ell^2\, x_2^2(t)$

$$V(x_1(t), x_2(t)) = E_{pot}(t) + E_{kin}(t) = m\ell g\,(1 - \cos x_1(t)) + \frac{1}{2} m\, \ell^2 x_2^2(t)$$

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

$$\frac{d}{dt} V(x_1(t), x_2(t)) = \nabla V(x_1(t), x_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \nabla (x_1(t), x_2(t)) \cdot f(x_1(t), x_2(t))$$

$$\frac{d}{dt} V(x_1(t), x_2(t)) = m\ell g \frac{d}{dt}(1 - \cos x_1(t)) + \frac{1}{2} m\ell^2 \frac{d}{dt} x_2^2(t)$$

$$= m\ell g \sin x_1(t) \underbrace{\dot{x}_1(t)}_{= x_2(t)} + m\ell^2 x_2(t) \underbrace{\dot{x}_2(t)}_{= -\frac{g}{\ell} \sin(x_1(t))}$$

$$= m\ell g \sin x_1(t)\, x_2(t) + m\ell^2 x_2(t) \left(-\frac{g}{\ell}\right) \sin(x_1(t)) = 0$$

$\Rightarrow V$ ist Ljapunov-Fkt.

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Gedämpftes Pendel (mit nichtlinearer Dämpfung)

$$d(\dot{x}(t)) \begin{cases} >0 & : \dot{x}>0 \\ <0 & : \dot{x}<0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -d(x_2) - \frac{g}{\ell}\sin(x_1) \end{pmatrix} \qquad V(x_1,x_2) = mg\ell(1-\cos x_1) + \frac{1}{2} m\ell^2 x_2^2$$

$$\frac{d}{dt} V(x_1(t),x_2(t)) = mg\ell \sin(x_1)\dot{x}_1 + m\cdot\ell^2 x_2 \dot{x}_2$$

$$= \cancel{mg\ell \sin(x_1) x_2} - m\ell^2 x_2 \left(d(x_2) + \cancel{\tfrac{g}{\ell}\sin(x_1)} \right)$$

$$= -m\ell^2 \underbrace{x_2\, d(x_2)}_{\geq 0} \leq 0$$

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

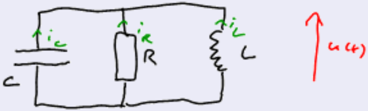
$t_1 > t_0$

$$V(x_1(t_1), x_2(t_1)) - V(x_1(t_0), x_2(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} V(x_1(t), x_2(t))\, dt$$

$$\underbrace{= -ml^2 \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{x_2(t)\, d(x_2(t))}_{\geq 0}\, dt}_{\text{Energieverlust im Intervall } [t_0, t_1]}$$

Stabilität

Stabilität und Ljapunov



$$i_C(t) + i_R(t) + i_L(t) = 0$$

$$\dot u(t) = \frac{1}{C}\, i_C(t) = -\frac{1}{C}\left(i_R(t) + i_L(t)\right)$$

$$= -\frac{1}{C}\left(i_L(t) + \frac{1}{R}\, u(t)\right)$$

$$\dot i_L(t) = \frac{1}{L}\, u(t)$$

$$\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot i_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC}\, u(t) - \frac{1}{C}\, i_L(t) \\ \frac{1}{L}\, u(t) \end{pmatrix}$$

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

$C > 0$, $L > 0$, $R > 0$

Energie am Kondensator: $E_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t)$

" an der Induktivität: $E_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$

$$V(i_L(t), u(t)) = E_L(t) + E_C(t)$$

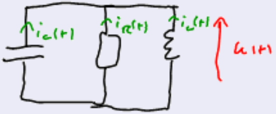
$$\frac{d}{dt} V(i_L(t), u(t)) = C u(t) \dot{u}(t) + L i_L(t) \dot{i}_L(t)$$

$$= -\frac{1}{R} u^2(t) - i_L(t) u(t) + i_L(t) u(t) = -\frac{1}{R} u^2(t) \leq 0$$

$$V(i_L(t_1), u(t_1)) - V(i_L(t_0), u(t_0)) = -\frac{1}{R} \int_{t_0}^{t_1} u^2(t)\, dt$$

Stabilität

Stabilität und Ljapunov



Nichtlineare Bauelementerelationen:

$$i_C(t) = \frac{d}{dt}\, q(u(t))$$

Ladungsfunktion (nichtlin. Kondensator-kennlinie)

$$i_R(t) = g(u(t))$$

Leitwertfunktion (nichtlin. Widerstands-kennlinie)

$$u(t) = \frac{d\varphi}{dt}(i_L(t))$$

Flussfunktion (nichtlin. Spulenkennlinie)

Annahmen:

$q(0) = 0$

$g(0) = 0$

$\varphi(0) = 0$

q, g, φ streng monoton wachsend

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Aus Annahme folgt: $\exists$ Umkehrfunktionen $q^{-1}, \delta^{-1}, \varphi^{-1}$

$\bar{q}(t)$: Ladung am Kondensator zum Zeitpunkt t

$\bar{\varphi}(t)$: Fluss an der Spule " " t

$$\dot{\bar{q}}(t) = \frac{d}{dt} q(u(t)) = i_C(t) = - i_R(t) - i_L(t)$$

$$= -g^{-1}(u(t)) - \varphi^{-1}(\bar{\varphi}(t))$$

$$\dot{\bar{\varphi}}(t) = \frac{d}{dt} \varphi(i_L(t)) = u(t) = q^{-1}(\bar{q}(t))$$

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\bar{q}(t)\\ \bar{\varphi}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S^{-1}(u(t)) \;-\; \varphi^{-1}(\bar{\varphi}(t)) \\ q^{-1}(\bar{q}(t)) \end{pmatrix}$$

Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\bar q(t)\\ \bar\varphi(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g^{-1}(q^{-1}(\bar q(t))) - \varphi^{-1}(\bar\varphi(t)) \\ q^{-1}(\bar q(t)) \end{pmatrix}$$

Kapazitive Energie:

$$E_c(t) = \int_0^{\bar q(t)} q^{-1}(\bar q)\, d\bar q \qquad (>0,\ \text{wenn } \bar q(t) \neq 0)$$

Induktive Energie

$$E_L(t) = \int_0^{\bar\varphi(t)} \varphi^{-1}(\bar\varphi)\, d\bar\varphi \qquad (>0,\ \text{wenn } \bar\varphi(t) \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad V(\bar q(t), \bar\varphi(t)) = \int_0^{\bar q(t)} q^{-1}(\bar q)\, d\bar q + \int_0^{\bar\varphi(t)} \varphi^{-1}(\bar\varphi)\, d\bar\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} V(\bar q(t), \bar\varphi(t)) = q^{-1}(\bar q(t)) \cdot \dot{\bar q}(t) + \varphi^{-1}(\bar\varphi(t))\, \dot{\bar\varphi}(t)$$

$$= -g^{-1}(q^{-1}(\bar q(t))) \cdot q^{-1}(\bar q(t)) - \varphi^{-1}(\varphi(t))\, q^{-1}(\bar q(t))$$

$$+ \varphi^{-1}(\bar\varphi(t)) \cdot q^{-1}(\bar q(t))$$

$$= -\underbrace{g^{-1}(q^{-1}(\bar q(t)))\, q^{-1}(\bar q(t))}_{\geq 0,\ \text{da } \operatorname{sign} g^{-1}(u) = \operatorname{sign} u\ \forall u \in \mathbb{R}} \leq 0$$