Stabilität

Linearisierung

Pendel revisited: n ungerade, gesteuert, keine Reibung

$$m\ell^2\ddot\varphi(t) = -mg\ell\sin(\varphi(t)) + u(t)$$

Drehmomentsteuerung

Gleichgewicht $\bar{x} = \begin{pmatrix}0\\ n\pi\end{pmatrix}$

Ansatz: $u(t) = \alpha_1\dot\varphi(t) + \alpha_0\varphi(t)$

„PD-Regler"

$$m\ell^2\ddot\varphi(t) = -mg\ell\sin(\varphi(t)) + \alpha_1\dot\varphi(t) + \alpha_0\varphi(t)$$

$$\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{\alpha_1}{m\ell^2}x_2 + \frac{\alpha_0}{m\ell^2}x_1 - mg\ell\sin x_1\end{pmatrix}}_{f}$$

$$f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\alpha_0}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}\cos x_1 & \frac{\alpha_1}{m\ell^2}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f'(0,n\pi) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{\alpha_0}{m\ell^2}+\frac{g}{\ell} & \frac{\alpha_1}{m\ell^2}\end{pmatrix} =: A$$

Nun: Bestimme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, so dass alle EWe von A neg. Realteil haben

Stabilität

Linearisierung

$$\dot{x} = -x^3$$

Betrachte $E(t) = x^2(t)$

$$\dot{E}(t) = 2x(t)\,\dot{x}(t) = -2x(t)\,x^3(t) = -2x^4(t) < 0, \text{ wenn } x(t) \neq 0$$

$\Rightarrow$ $|x(t)|$ monoton fallend $\Rightarrow$ Gl.gew. ist stabil

Stabilität

Satz (Stabilität und Linearisierung)

Gegeben sei eine DGL $\dot{x} = f(x(t))$ mit Gleichgewicht $\bar{x}$ ~~x_0~~. Sei $A := f'(x_0)$. Dann gilt:

- Besitzt A einen Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, so ist das Gleichgewicht $\bar{x}$ der DGL $\dot{x} = f(x(t))$ instabil.
- Haben alle Eigenwert von A einen negativen Realteil, so ist das Gleichgewicht $\bar{x}$ der DGL $\dot{x} = f(x(t))$ asymptotisch stabil.

Idee: $y(t) := x(t) - \bar{x}$

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t))$$
$$= f(\bar{x} + y(t))$$
$$\approx \underbrace{f(\bar{x})}_{=0} + f'(\bar{x})\, y(t)$$
$$= \underbrace{f'(\bar{x})}_{=:A}\, y(t)$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) \approx A\, y(t)$$

Stabilität

Stabilität und Linearisierung

$$m \ell \ddot{\varphi}(t) + d \dot{\varphi}(t) + mg \sin(\varphi(t)) = 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\frac{d}{m\ell} x_2(t) - \frac{g}{\ell} \sin(x_1(t)) \end{pmatrix}$$

Gleichgewichte: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ n\pi \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{Z}$

1. Fall: n gerade $\Rightarrow$ Pendel hängt

2. Fall: n ungerade $\Rightarrow$ Pendel steht

Stabilität

Stabilität und Linearisierung

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{d}{ml}x_2 - \frac{g}{l}\sin(x_1) \end{pmatrix}$$

Annahmen:

$m > 0$

$g > 0$

$l > 0$

$d > 0$

$$f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(x_1) & -\frac{d}{ml} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ n\pi \end{pmatrix}$$

$$f'(\bar{x}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} & -\frac{d}{ml} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1}\frac{g}{l} & -\frac{d}{ml} \end{pmatrix} =: A$$

Stabilität

ganz allgemein: Wenn $a_1, a_0 > 0$, dann gilt für NSen von $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, dass Realteil < 0.

Stabilität und Linearisierung

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \frac{d}{ml}\lambda + (-1)^n \frac{g}{l}$$

1. Fall: (n gerade): $\lambda_{1/2} = -\frac{d}{2ml} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2l^2} - \frac{g}{l}} \Rightarrow Re(\lambda_{1/2}) < 0$

$\Rightarrow$ asy stabil

2. Fall (n gerade): $\lambda_{1/2} = -\frac{d}{2ml} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2l^2} + \frac{g}{l}}$

$$\Rightarrow Re(\lambda_1) = -\frac{d}{2ml} + \underbrace{\sqrt{\frac{d^2}{4m^2l^2} + \frac{g}{l}}}_{> \frac{d}{2ml}} > 0$$

$\Rightarrow$ instabil

Stabilität

Stabilität und Linearisierung

Was ist bei $d = 0$? (reibungsfrei)
und n gerade

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Bsp:

a) $\dot{x} = x^3$, $x(0) = x_0 \neq 0$

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{y^3}\, dy = \int_{x_0}^{x(t)} y^{-3}\, dy$$

$$= \frac{-y^{-2}}{2}\Big|_{x_0}^{x(t)} = \frac{1}{2x_0^2} - \frac{1}{2x^2(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x^2(t)} = \frac{1}{2x_0^2} - t \Rightarrow x^2(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0^2} - 2t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x_0^2} - 2t}} = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2t x_0^2}}$$

$$\Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \to \frac{1}{2x_0^2}]{} \infty \Rightarrow \text{instabiles Glgew. } 0$$

Linearisierung $f'(0) = 0$

$\rightsquigarrow$ Satz hat keine Anwendung!

Stabilität

Wir betrachten die DGL

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \text{mit } f(0) = 0.$$

Definition

Eine stetig differenzierbare Funktion $V : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt Ljapunov–Funktion auf $K_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\} \subset D$ für $\dot{x}(t) = f(x(t))$, falls gilt

a) $V(0) = 0$ und

$$V(x) > 0 \text{ für } \cancel{x \bar{K}_r(0) \setminus \{0\}} \qquad x \in K_r(0) \setminus \{0\}$$

b) $\nabla V \cdot f(x) \leq 0$

$$\cancel{\nabla V \cdot x} \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in K_r(0)$$

Gilt in b) sogar

b') $\nabla V \cdot f(x) < 0$

$$\cancel{\nabla V \cdot x} < 0 \qquad \text{für alle } x \in K_r(0)$$

so nennt man $V(\cdot)$ eine strenge Ljapunov–Funktion.

Stabilität

Satz (Stabilitätssatz mit Ljapunov–Funktionen)

1) Existiert eine Ljapunov–Funktion $V(x)$ von $\dot{x}(t) = f(x(t))$, so ist $\bar{x} = 0$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

2) Ist $V(x)$ zudem eine strenge Ljapunov–Funktion von $\dot{x}(t) = f(x(t))$, so ist $\bar{x} = 0$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Rechnen: $V(x) > 0 \quad \forall\, x \in K_r(0)$, $V(0) = 0$

$\nabla V \cdot f(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in K_r(0)$

Betrachte: $V(x(t))$, $x(t)$ Lsg von $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$, $|x_0| < r$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) \leq 0$$

Kettenregel $\Rightarrow V(x(t))$ mon. fallend

Stabilität

Stabilität und Ljapunov

Ungedämpftes Pendel: $m \ell^2 \ddot{\varphi} = m g \ell \sin(\varphi)$

$\ell - \cos\varphi \cdot \ell$

Potenzielle Energie:

$$E_{pot} = \ell(1-\cos\varphi)\cdot g \cdot m$$

Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(E_{kin} + E_{pot}\right)$$