Stabilität

Stabilität

Bei: $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ (*) gilt

Eine Lsg x von (*) ist (asy.) stabil.

$\Leftrightarrow$ Die Lsg $x=0$ von (*) " " " .

$\Leftrightarrow$: Die DGL $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ ist (asy.) stabil.

Stabilität

Ein einfaches Stabilitätskriterium

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Wenn $A + A^\top$ negativ definit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ asymptotisch stabil.
2. Wenn $A + A^\top$ negativ semidefinit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ stabil.

2. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $|x_0| < \delta := \varepsilon$.

Dann gilt für $x : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^n$ mit $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |x(t)|^2 = \frac{d}{dt} x(t)^T x(t) &= \dot{x}(t)^T x(t) + x(t)^T \dot{x}(t) \\ &= (Ax(t))^T x(t) + x(t)^T (Ax(t)) \\ &= x(t)^T A^T x(t) + x(t)^T A x(t) = x^T(t) (A + A^T) x(t) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $|x(t)| : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mon. fallend

$\Rightarrow$ $\forall t \geq 0$: $|x(t)| \leq |x(0)| = |x_0| < \delta = \varepsilon$.

Stabilität

Ein einfaches Stabilitätskriterium

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. - Wenn $A + A^\top$ negativ definit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ asymptotisch stabil.
   - Wenn $A + A^\top$ negativ semidefinit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ stabil.

$$\frac{d}{dt} |x(t)|^2 = x^T(t)(A + A^T)x(t) \leq 0 \qquad \text{(wie vorhin)}$$

$$|x(t)|^2 - |x(0)|^2 = \int_0^t \frac{d}{d\tau} |x(\tau)|^2 \, d\tau = \underline{\int_0^t x^T(\tau)(A + A^T)x(\tau) \, d\tau}$$

$$\lim_{t \to \infty} \Big(\qquad \Big)$$

wenn $A + A^T < 0$: $|x(t)|$ mon. fallend und n. u. beschr.

$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} |x(t)|$ ex.

Stabilität

Beachte: „Rückrichtungen gelten nicht!"

Ein einfaches Stabilitätskriterium

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Wenn $A + A^\top$ negativ definit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ asymptotisch stabil.
- Wenn $A + A^\top$ negativ semidefinit ist, dann ist die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ stabil.

$\Rightarrow \quad \int_0^\infty x^T(t)\,(A+A^T)\,x(t)\,dt \quad$ existiert

$A + A^T < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, m > 0$ sd. $\underbrace{m \cdot x^T x}_{= m|x|^2} \leq x^T(A+A^T)x$

$\Rightarrow \quad x^T(t)\,(A+A^T)\,x(t) \geq \frac{1}{m}\,|x(t)|^2$

$\Rightarrow \quad \int_0^\infty |x(t)|^2\,dt$ ex. auch. Zusammen mit $\lim_{t\to\infty} |x(t)|^2 \geq 0$

gilt $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$. $\Rightarrow$ asy. stabil.

Stabilität

Stabilität bei linearen Differentialgleichungen

Sei $A(\cdot) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $X(\cdot) : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ~~die~~ eine zugehörige Fundamentalmatrix.

- Die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ genau dann asymptotisch stabil, wenn $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$.
- Die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ genau dann ~~asymptotisch~~ stabil, wenn $\{X(t) \;:\; t \geq t_0\}$ beschränkt.

Folgerung: $\dot{x}(t) = Ax(t)$ asy. stabil $\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ stabil $\Leftrightarrow \{e^{At} : t \geq 0\}$ beschr.

Stabilität

Jordan-Blöcke

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k} \qquad e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = a + ib \in \mathbb{C}, \quad a, b \in \mathbb{R}$

(i) $e^{Jt} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \iff a = \mathrm{Re}(\lambda) < 0$

(ii) Wenn $a = \mathrm{Re}(\lambda) > 0$, dann ist $\{e^{Jt} : t \geq 0\}$ unbeschr.

(iii) Betrachte λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$

Stabilität

Jordan-Blöcke

$\lambda = ib \quad , b \in \mathbb{R}$

$$e^{\lambda t} = \cos(bt) + i\sin(bt)$$

$$e^{Jt} = \left(\cos(bt) + i\sin(bt)\right) \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\{ e^{Jt} : t \geq 0 \}$ beschr. $\Leftrightarrow \quad k = 1$

$\Leftrightarrow$ geometr. Vielfachheit von λ = alg. Vielfachheit von λ

Stabilität

Jordan-Blöcke

allg. Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $T^{-1} A T = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_e \end{pmatrix}$

Jordanform

$$e^{At} = T \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_e t} \end{pmatrix} T^{-1}$$

mit zug. EWen $\lambda_1, \dots, \lambda_e$

Also: (i) $e^{At} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \iff Re(\lambda_1) < 0, \dots, Re(\lambda_e) < 0$

(ii) $\{e^{At} : t \geq 0\}$ beschr. $\iff Re(\lambda_1) \leq 0, \dots, Re(\lambda_e) \leq 0$

$\wedge$ wenn für $i \in \{1, \dots, e\}$ gilt $Re(\lambda_i) = 0$, dann ist alg. Vielfachheit von λ_i = geom. Vielfachheit von λ_i

Stabilität

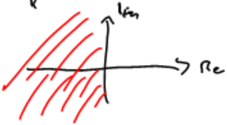
Stabilität linearer DGLn

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ genau dann asymptotisch stabil, wenn für alle Eigenwerte λ von A gilt $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.
- Die DGL $\dot{x}(t) = Ax(t)$ genau dann stabil, wenn für alle Eigenwerte λ von A gilt $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ UND für alle Eigenwerte λ von A gilt: Wenn $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, dann ist die algebraische Vielfachheit von λ gleich der geometrischen Vielfachheit von λ ist.

Notation: $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist EW von } A\}$ „Spektrum von A“

$\mathbb{C}_- := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$ „linke Halbebene“



Also: $\dot{x} = Ax$ asy. stabil

$\Leftrightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$

Stabilität

Stabilität linearer DGLn

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \sigma(A) = \{-\frac{1}{4}\} \Rightarrow$ $\dot{x} = Ax$ asy. stabil

$A + A^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ist jedoch indefinit

Stabilität

Linearisierung

Pendel $\quad \ddot{\varphi}(t) + d\,\dot{\varphi}(t) + k\,\sin(\varphi(t)) = 0 \quad , \quad k > 0,\ d \geq 0$

(da skaliert g, m, ℓ drin)

Für kleine φ gilt

$$\sin\varphi \approx \varphi$$
$$= \sin'(0)\,\varphi$$

Linearisiertes Modell:

$$\ddot{\varphi}(t) + d\,\dot{\varphi}(t) + k\,\sin'(0)\cdot\varphi(t) = 0$$

also $\quad \ddot{\varphi}(t) + d\,\dot{\varphi}(t) + k\,\varphi(t) = 0$

Stabilität

Linearisierung

Allgemein $\dot{x}(t) = f(x(t))$ mit Glgew $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

(d.h. $f(\bar{x}) = 0$)

$y(t) := x(t) - \bar{x}$ (manchmal auch Bezeichnung $\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}$)

$\Rightarrow \dot{y}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t))$

$$= f(y(t) + \bar{x}) \approx \underbrace{f(\bar{x})}_{=0} + \underbrace{f'(\bar{x})}_{=: A \in \mathbb{R}^{n \times n}} \cdot y(t)$$

Jacobimatrix

$\Rightarrow$ „Linearisierung" $\dot{y}(t) = A y(t)$ mit $A = f'(\bar{x})$

Stabilität

Satz (Stabilität und Linearisierung)

Gegeben sei eine DGL $\dot{x} = f(x(t))$ mit Gleichgewicht $\overline{\cancel{x_0}} \in \mathbb{R}^4$. Sei $A := f'(\overline{\cancel{x_0}})$. Dann gilt:

- Besitzt A einen Eigenwert λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, so ist das Gleichgewicht $\overline{\cancel{x_0}}$ der DGL $\dot{x} = f(x(t))$ instabil.
- Haben alle Eigenwert von A einen negativen Realteil, so ist das Gleichgewicht $\overline{\cancel{x_0}}$ der DGL $\dot{x} = f(x(t))$ asymptotisch stabil.

Stabilität

Stabilität und Linearisierung

Pendel
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ -d\,x_2 - k\sin(x_1) \end{pmatrix}}_{f(x_1,x_2)}$$

$$f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k\cos(x_1) & -d \end{pmatrix}$$

Bei Glgew: $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $f'(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -d \end{pmatrix}$

Bei Glgew: $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $f'(\bar{x}_1,\bar{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & -d \end{pmatrix}$