Stabilität

Stabilität

$$\left(m\ell^2\ddot{\varphi}(t) + d\,\dot{\varphi}(t) + mg\ell\sin(\varphi(t)) = 0 \quad , d>0 \text{ mit Reibung} \right)$$

Pendel

$$m\ell^2\ddot{\varphi}(t) + mg\ell\sin(\varphi(t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t))$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2(t) \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_1(t)) \end{pmatrix}}_{= f(x(t))}$$

Gleichgewichte: $f(\bar{x}) = 0 \quad , \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(\bar{x}_1) \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x}_2 = 0 \quad , \bar{x}_1 = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Leftrightarrow$  $\vee$ 

n gerade   n ungerade

Stabilität

Gleichgewicht

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad (*)$$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt „Gleichgewicht", wenn $x(t) \equiv \bar{x}$ Lösung von $(*)$ ist.

Beachte: $\bar{x}$ ist Gleichgewicht $\Longleftrightarrow$ $f(\bar{x}) = 0$

Stabilität

Definition (Stabilität eines Gleichgewichts)

Geg: $\dot{x} = f(x)$, mit Gleichgew. $\bar{x}$.

$\bar{x}$ heißt „stabiles Gleichgewicht", wenn

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$: Wenn $|x_0 - \bar{x}| < \delta$, dann erfüllt die Lsg $x(t)$ von $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_0$:

$$|x(t) - \bar{x}| < \varepsilon.$$

$\bar{x}$ heißt „asymptotisch stabiles Gleichgew.", wenn es stab. Glgew. ist und zusätzlich $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$

Stabilität

Definition (Stabilität allgemein)

Notation : $x(t, t_0, x_0)$: Lsg von $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$

Def: Die Lsg $x(t, t_0, x_0)$ heißt „stabil",

wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: Wenn $|\bar{x}_0 - x_0| < \delta$, dann

ist $|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \bar{x}_0)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$

Gilt zusätzlich $\lim\limits_{t \to \infty} x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \bar{x}_0) = 0 \quad \forall \bar{x}_0$ mit $|x_0 - \bar{x}_0| < \delta$

so heißt die Lsg $x(t, t_0, x_0)$ „asymptotisch stabil".

Stabilität

Stabilität

Pendel (ungedämpft)

$$\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_1)\end{pmatrix}$$

Energie:

$$E(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\, m\, \ell^2\, \dot\varphi(t)^2}_{\text{Kin. Energie}} + \underbrace{m g \ell\,(1-\cos(\varphi(t)))}_{\text{pot. Energie}}$$

Leistung

$$\dot E(t) = m\,\ell^2\,\dot\varphi(t)\,\ddot\varphi(t) + m g \ell\,\sin(\varphi(t))\,\dot\varphi(t)$$
$$= \dot\varphi(t)\,\underbrace{\left(m\,\ell^2\,\ddot\varphi(t) + m g \ell\,\sin(\varphi(t))\right)}_{=0} = 0$$

Also $E(t)$ const. $\overset{\text{später}}{\Longrightarrow}$ Gl.gew. stabil

(Lyapunov-Theorie)

Stabilität

Pendel (gedämpft) $\quad m\ell^2\ddot{\varphi}(t) + d\,\dot{\varphi}(t) + mg\ell\,\sin(\varphi(t)) = 0$

$$E(t) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}(t)^2 + mg\ell\,(1-\cos(\varphi(t)))$$

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &= m\ell^2\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t) + mg\ell\,\sin(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)\\ &= \dot{\varphi}(t)\left(m\ell^2\ddot{\varphi}(t) + mg\ell\,\sin(\varphi(t))\right)\\ &= \dot{\varphi}(t)\,(-d\,\dot{\varphi}(t)) = -d\,\dot{\varphi}(t)^2 \leq 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Energie mon. fallend $\underset{\text{später}}{\Rightarrow}$ asy. stabil

Stabilität

Beispiel: a) $\dot{x}(t) = -x(t)$, $x(t,t_0,x_0) = x_0 \cdot e^{-(t-t_0)}$

Ist stabil: Sei $\varepsilon > 0$. Für $\delta = \varepsilon$ gilt:

Wenn $|\bar{x}_0 - x_0| < \delta = \varepsilon$, dann gilt

$$|x(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,\bar{x}_0)| = |x_0 e^{-(t-t_0)} - \bar{x}_0 e^{-(t-t_0)}|$$

$$= |x_0 - \bar{x}_0| \underbrace{e^{-(t-t_0)}}_{\leq 1 \ \forall t \geq t_0}$$

$$\leq |x_0 - \bar{x}_0| < \delta = \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Ist sogar asy. stabil, da immer gilt

$$\lim_{t\to\infty} |x(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,\bar{x}_0)| = \lim_{t\to\infty} |x_0 - \bar{x}_0| e^{-(t-t_0)} = 0$$

Stabilität

Stabilität

b) $\dot{x}(t) = x(t)$, $x(t, t_0, x_0) = x_0\, e^{t-t_0}$

Für $\bar{x}_0 \neq x_0$ gilt $|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \bar{x}_0)|$
$= |x_0 - \bar{x}_0|\; e^{t-t_0} \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$

$\Rightarrow$ kann nicht stabil sein!

c) $\dot{x}_1 = x_2$
$\dot{x}_2 = -x_1$

Betrachte Glgew. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_0 = 0$

Sei $\varepsilon > 0$. Für $\delta \leq \varepsilon$ gilt: Wenn $\left|\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}\right| < \delta = \varepsilon$, dann

gilt für die Lsg $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ von $\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{array}$:

Stabilität

Stabilität

$$\frac{d}{dt}\left\|\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}\right\|^2 = \frac{d}{dt}\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)\right) = 2\,x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2\,x_2(t)\dot{x}_2(t)$$

$$= 2\,x_1(t)\,x_2(t) + 2\,x_2(t)\,(-x_1(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \left\|\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}\right\| \text{ konst.} \quad \Rightarrow \quad \forall\, t \geq 0: \left\|\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}x_{10}\\x_{20}\end{pmatrix}\right\|$$

$$< \delta = \varepsilon$$

Weiter gilt: $\left\|\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}\right\| \underset{t\to\infty}{\not\to} 0$, wenn $\begin{pmatrix}x_{10}\\x_{20}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Also ist $\begin{array}{l}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1\end{array}$ stabil, aber nicht asy. stabil

Stabilität

Stabilität

Betrachte nun lin. Syst.: $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + g(t)$

$A : \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig

$g : \mathbb{R}_{\geq t_0} \to \mathbb{R}^n$ stetig

$(\mathbb{R}_{\geq t_0} = [t_0, \infty))$

Für $x_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt $x(t) := x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \bar{x}_0)$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t, t_0, x_0) - \dot{x}(t, t_0, \bar{x}_0) = A(t)\,x(t, t_0, x_0) + g(t) - A(t)\,x(t, t_0, \bar{x}_0) - g(t)$$

$$= A(t)\big(x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_0)\big) = A(t)\,x(t)$$

Stabilität

Stabilität

Folgerung für $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + g(t)$

Äquivalent sind: (i) Es gibt eine (asy.) stabile Lsg.

(ii) Alle Lsgen sind (asy.) stabil

(iii) Das Gl.gw. 0 von $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t)$ ist (asy.) stabil

In dem Fall nennt man $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + g(t)$ „(asy.) stabil"

Stabilität

Stabilität

Weiter gilt: Geg. $\dot{x}(t) = A(t)\, x(t)$ (*) mit Fund.-matrix $X(t)$

Es gilt (*) stabil $\Longleftrightarrow$ $X(t)$ beschränkt auf $[t_0, \infty)$

(*) asy. stabil $\Longleftrightarrow$ $\lim_{t \to \infty} X(t) = 0$

Stabilität

Stabilität

Ein „leichtes" Stabilitätskrit. für $\dot{x}(t) = A\,x(t)$:

Wenn $A + A^T$ neg. def., dann ist $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ stabil.

Bew.: $\dot{x}(t) = A\,x(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(|x(t)|^2\right) = \frac{d}{dt}\left(x^T(t)\,x(t)\right) = \dot{x}^T(t)\,x(t) + x^T(t)\,\dot{x}(t)$$

$$= (A\,x(t))^T x(t) + x^T(t)(A\,x(t))$$

$$= x^T(t)\,A^T\,x(t) + x^T(t)\,A\,x(t) = \underbrace{x^T(t)(A^T + A)\,x(t)}_{<0\ \forall x(t) \neq 0}$$

... Wir können nun folgern, dass $x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.