**Fachbereich Mathematik** **WiSe 2018/2019**

Prof. Dr. T. Reis

# Klausur zur Mathematik III (Modul: Differentialgleichungen I)

**05. März 2019**

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. Es gehen maximal 20 Punkte in die Wertung ein. Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Name:** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Vorname:** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Matr.-Nr.:** | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Stg:** | AIW | BU | CI | ET | GES | IN | LUM | MB | MTB | SB | BV | EUT | VT | |

**Wertung nach PO :** zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

| Aufg. | Punkte | Korrekteur |
|---|---|---|
| **1** | | |
| **2** | | |
| **3** | | |

$\sum =$

**Aufgabe 1:** (7 + 3 Punkte)

Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(t).$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(t) + e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:**

a) Berechnung der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ :
$$P(\lambda) := \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -5-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-5-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -4 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-5-\lambda) \cdot \left[(-1-\lambda)^2 + 16\right].$$

$P(\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = -5 \vee (\lambda+1)^2 = -16$

Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind also:
$$\lambda_1 = -5,\ \lambda_{2,3} = -1 \pm 4i. \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

Berechnung der Eigenvektoren:

$\lambda_1 = -5$:
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4v_1 + 4v_3 \\ 0 \\ -4v_1 + 4v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1\. Zeile und 3. Zeile $v_1 = v_3 = 0$. 2. Zeile: immer erfüllt.

Wir erhalten also die Eigenvektorrichtung: $\boldsymbol{v}^{[1]} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Mit der zugehörigen Lösung: $\boldsymbol{x}^{[1]}(t) = e^{-5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **(2 Punkte)**

$\lambda_2 = -1 + 4i$:
$$\begin{pmatrix} -4i & 0 & 4 \\ 0 & -4-4i & 0 \\ -4 & 0 & -4i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4iv_1 + 4v_3 \\ -(4+4i)v_2 \\ -4v_1 - 4iv_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Zeile: $v_2 = 0$.

1: Zeile bzw. 3. Zeile: $v_3 = iv_1$.

Zum Beispiel $\boldsymbol{v}^{[2]} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ und damit die Komplexe Lösung:

$$\boldsymbol{y}^{[1]}(t) := e^{-t+4it} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = e^{-t}(\cos(4t) + i\sin(4t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(4t) + i\sin(4t) \\ 0 \\ -\sin(4t) + i\cos(4t) \end{pmatrix}.$$

Damit hat man zwei reelle Lösungen, zum Beispiel:

$$\boldsymbol{x}^{[2]}(t) := e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(4t) \\ 0 \\ -\sin(4t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad e^{-t} \begin{pmatrix} \sin(4t) \\ 0 \\ \cos(4t) \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist:

$$\boldsymbol{x}_h(t) = c_1 \, \boldsymbol{x}^{[1]}(t) + c_2 \, \boldsymbol{x}^{[2]}(t) + c_3 \, \boldsymbol{x}^{[3]}(t). \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

b) Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe machen wir den Ansatz:

$$\boldsymbol{x}_p(t) = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Einsetzen in das System ergibt:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = 3e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}. \textbf{[1 Punkt]}$$

Oder

$$\begin{aligned} 3a &= -a + 4c + 4 \implies a = c + 1 \\ 3b &= -5b + 8 \implies b = 1 \\ 3c &= -4a - c - 4 \implies 4c = -4c - 4 - 4 \implies c = -1, a = 0. \textbf{[1 Punkt]} \end{aligned}$$

Die Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_h + \boldsymbol{x}_p$. **[1 Punkt]**

**Aufgabe 2:** (6 + 4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe.

$$\ddot{x}(t) + 5\,\dot{x}(t) + 4\,x(t) = 2e^{-4t} \qquad \forall t > 0, \qquad x(0) = 4,\ \dot{x}(0) = \frac{13}{3}\,.$$

b) In welche algebraische Gleichung lässt sich die folgende Anfangswertaufgabe durch die Laplace-Transformation überführen?

$$\ddot{x}(t) + 3\,\dot{x}(t) + 2\,x(t) = e^{-4t}\sin(3t) \qquad \forall t > 0, \qquad x(0) = 4,\ \dot{x}(0) = 2\,.$$

Belegen Sie Ihre Antwort durch Zwischenrechnungen.

**Lösung zu 2:**

a)

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda+1)(\lambda+4) = 0 \iff \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -4\,.$$

Allgemeine Lösung der homogenen Aufgabe

$$x_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Der Ansatz $x_p(t) = ate^{-4t}$ für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe liefert

$\dot{x}_p(t) = (a - 4at)e^{-4t}, \qquad \ddot{x}_p(t) = (-8a + 16at)e^{-4t}\,.$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$(-8a + 16at)\,e^{-4t} + 5(a - 4at)e^{-4t} + 4ate^{-4t} = 2e^{-4t}$$

$$\iff -8a + 5a + 16at - 20at + 4at = 2 \implies -3a = 2,\ a = -\frac{2}{3}\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Damit erhalten wir als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} - \frac{2}{3}te^{-4t}. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Die Anfangswerte $x(0) = 4,\ \dot{x}(0) = \frac{13}{3}$ liefern die Bedingungen;

$x(0) = c_1 + c_2 = 4 \implies c_2 = 4 - c_1\,.$

$\dot{x}(0) = -c_1 - 4c_2 - \frac{2}{3} = -c_1 - 16 + 4c_1 - \frac{2}{3} = \frac{13}{3} \implies 3c_1 = 16 + \frac{15}{3} = 21$

Also $c_1 = 7$ und $c_2 = 4 - 7 = -3\,.$ **[2 Punkte]**

b) $x \circ\!\!-\!\!\bullet\ X, \qquad \dot{x} \circ\!\!-\!\!\bullet\ sX - x(0) = sX - 4,$

$\ddot{x} \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2X - 4s - \dot{x}(0) = s^2X - 4s - 2$

$f(t) = \sin(3t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{3}{s^2+3^2} = F(s)$ **[2 Punkte]**

Nach dem Verschiebungssatz gilt: $e^{at}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s-a)$, also

$e^{-4t}f(t) = e^{-4t}(\sin(3t)) \circ\!\!-\!\!\bullet\ = F(s+4) = \frac{3}{(s+4)^2+9}$ **[1 Punkt]**

Die AWA geht über in

$$s^2X - 4s - 2 + 3(sX - 4) + 2X = (s^2+3s+2)X - 14 - 4s = \frac{3}{(s+4)^2+9}\,. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)

a) Kann es sich bei den Funktionen

$$x_1(t) = e^t, \qquad x_2(t) = te^t, \qquad x_3(t) = e^{2t}, \qquad x_4(t) = e^{3t}$$

um ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) - 6\ddot{x}(t) + 11\dot{x}(t) - 6x(t) = 0$$

handeln? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Die Funktionen

$$\boldsymbol{x}^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ 2(t-1) \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{[3]}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2 \\ 2t \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind Lösungen des Systems

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t).$$

Bilden sie auch ein Fundamentalsystem?

**Lösung:**

**a)** Nein! Der Lösungsraum hat die Dimension 3!

**b)** Nein, denn mit diesen Funktionen gilt für die Wronski- Determinante:

$$W(0) = \det \boldsymbol{X}(0) = \det(\boldsymbol{x}^{[1]}(0), \boldsymbol{x}^{[2]}(0), \boldsymbol{x}^{[3]}(0)) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$W(0) = -1 \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -1(-4) - 2(-2) = 0.$$