Aufgabe 1: (7 + 3 Punkte) Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(t).$$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(t) + e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: (6 + 4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe.

$$\ddot{x}(t) + 5\,\dot{x}(t) + 4\,x(t) = 2e^{-4t} \qquad \forall t > 0, \qquad x(0) = 4,\ \dot{x}(0) = \frac{13}{3}.$$

b) In welche algebraische Gleichung lässt sich die folgende Anfangswertaufgabe durch die Laplace-Transformation überführen?

$$\ddot{x}(t) + 3\,\dot{x}(t) + 2\,x(t) = e^{-4t}\sin(3t) \qquad \forall t > 0, \qquad x(0) = 4,\ \dot{x}(0) = 2.$$

Belegen Sie Ihre Antwort durch Zwischenrechnungen.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

a) Kann es sich bei den Funktionen

$$x_1(t) = e^t, \qquad x_2(t) = te^t, \qquad x_3(t) = e^{2t}, \qquad x_4(t) = e^{3t}$$

um ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) - 6\ddot{x}(t) + 11\dot{x}(t) - 6x(t) = 0$$

handeln? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Die Funktionen

$$\boldsymbol{x}^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ 2(t-1) \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 1 - t \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{[3]}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2 \\ 2t \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind Lösungen des Systems $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)$.

Bilden sie auch ein Fundamentalsystem? Begründen Sie Ihre Antwort!