Fachbereich Mathematik **SoSe 2019**

Prof. Dr. T. Reis

Klausur zur Mathematik III (Modul: Differentialgleichungen I)

30. August 2019

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. Es gehen maximal 20 Punkte in die Wertung ein. Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Stg:	AIW	BU	CI	ET	GES	IN	LUM	MB	MTB	SB	BV	EUT	VT	

Wertung nach PO : zus. mit Analysis III ☐ Einzelwertung ☐

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: (7 + 3 Punkte)

a) Berechnen Sie eine reelle Darstellung der Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\ddot{x}(t) + 4\,x(t) = \cos(2t) \qquad \forall t > 0, \qquad x(0) = 1,\, \dot{x}(0) = 8\,.$$

Verwenden Sie zur Bestimmung einer partikulären Lösung den Ansatz

$$x_p(t) = \alpha t \sin(2t)\,.$$

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x(t))^2 \cdot \dot{x}(t) \cdot e^{-t} = 1 + e^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

a)

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda = \pm 2i\,.$$

Komplexe Lösungen $e^{\pm 2it}$. Allgemeine Lösung der homogenen Aufgabe

$$x_h(t) = c_1 \mathrm{Re}\,(e^{2it}) + c_2 \mathrm{Im}\,(e^{2it}) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t). \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Der Ansatz $x_p(t) = \alpha t \sin(2t)$ für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe liefert mit

$\dot{x}_p(t) = \alpha(\sin(2t) + 2t\cos(2t))$

$\ddot{x}_p(t) = \alpha(4\cos(2t) - 4t\sin(2t))$

die Gleichung

$\alpha(4\cos(2t) - 4t\sin(2t)) + 4\alpha t\sin(2t) \overset{!}{=} \cos(2t)\,.$

Hieraus folgt $\alpha = \frac{1}{4}, \qquad x_p(t) = \frac{1}{4}t\sin(2t)$

$$x(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{1}{4}t\sin(2t). \qquad \textbf{[3 Punkte]}$$

Die Anfangswerte liefern

$x(0) = c_1 = 1\,.$

$\dot{x}(t) = -2c_1\sin(2t) + 2c_2\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}t\cos(2t)$

$\dot{x}(0) = 2c_2 = 8 \implies c_2 = 4\,.$

Also $x(t) = \cos(2t) + 4\sin(2t) + \frac{1}{4}t\sin(2t).$ **[2 Punkte]**

b) Separation liefert

$$x^2 \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1 + e^{-t}}{e^{-t}}. \qquad \textbf{[Ansatz: 1 Punkt]}$$

Weiter rechnet man

$$\int x^2 dx = \int \left(\frac{1}{e^{-t}} + \frac{e^{-t}}{e^{-t}}\right) dt = \int \left(e^t + 1\right) dt$$

$$\implies \frac{x^3}{3} = e^t + t + C\,.$$

Und damit

$x(t) = (\,3e^t + 3t + 3C\,)^{\frac{1}{3}}\,.$ **[2 Punkte]**

Aufgabe 2: (4 + 6 Punkte)

a) Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie den stationären Punkt $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ des Systems
$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(t)$ auf Stabilität.

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 6te^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tipp: Bestimmen sie zunächst die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems und benutzen Sie anschließend die Methode der Variation der Konstanten.

Lösung :

a) **Erste Variante:** Entwicklung nach der zweiten Spalte ergibt:
$\det(\boldsymbol{A}) = (-1)^{1+2}(-2)\,(-2(-3) - (-1)(-2)) = 8 > 0\,.$
$\boldsymbol{A}$ kann keine drei nicht positive reelle Eigenwerte haben. Bei zwei komplexen Eigenwerten $a \pm ib$, hätte
$\det(\boldsymbol{A}) = (a - bi)(a + bi) \cdot \lambda_3 = (a^2 + b^2) \cdot \lambda_3 > 0$
ebenfalls $\lambda_3 > 0$ zur Folge.
Es gibt also mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil! Der stationäre Punkt $\mathbf{0}$ ist instabil. **(4 Punkte)**

Zweite Variante: Berechnung der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$: Entwicklung nach der letzten Zeile

$$\begin{aligned}
P(\lambda) :&= \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 0-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -\lambda & -2 \end{pmatrix} + (-3-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= 2\lambda - 4 - (3+\lambda)(\lambda^2 - 4) = 2(\lambda - 2) - (3+\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) \\
&= -(\lambda - 2) \cdot \left[\lambda^2 + 5\lambda + 4\right] \qquad \text{(hier ist man eigentlich fertig: } \lambda_1 > 0 \\
&= -(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+4)\,. \ \textbf{(3 Punkte)}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}$ hat den Eigenwert $\lambda_1 = 2 > 0$. Der stationäre Punkt $\mathbf{0}$ ist instabil. **(1 Punkt)**

b) Bestimmung der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$:

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 4\\ 2 & -1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)-8 = \lambda^2-1^2-8=0 \Longrightarrow \lambda_{1,2}=\pm 3\,.$$

Bestimmung der Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$:

$$\lambda=-3: \qquad \begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot \boldsymbol{v}^{[1]} = \mathbf{0} \Longleftarrow \boldsymbol{v}^{[1]} = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

$$\lambda=3: \qquad \begin{pmatrix}-2 & 4\\ 2 & -4\end{pmatrix}\cdot \boldsymbol{v}^{[2]} = \mathbf{0} \Longleftarrow \boldsymbol{v}^{[2]} = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Mit der Fundamentalmatrix $\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix}e^{-3t} & 2e^{3t}\\ -e^{-3t} & e^{3t}\end{pmatrix}$ **(2 Punkte)**

und dem Ansatz $\boldsymbol{x}_p(t) = \boldsymbol{X}(t)\mathbf{c}(t)$

liefert die Differentialgleichungdas Gleichungssystem:

$$\boldsymbol{X}(t) = \begin{pmatrix}e^{-3t} & 2e^{3t}\\ -e^{-3t} & e^{3t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dot c_1(t)\\ \dot c_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6te^{3t}\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} e^{-3t}\dot c_1(t) + 2e^{3t}\dot c_2(t) &= 6te^{3t}\\ -e^{-3t}\dot c_1(t) + e^{3t}\dot c_2(t) &= 0\,. \end{aligned}$$ **(1 Punkt)**

Addition der beiden Zeilen liefert $\dot c_2(t) = 2t$. Dies eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt

$$-e^{-3t}\dot c_1(t) + 2te^{3t}\dot c_2(t) = 0 \Longleftrightarrow \dot c_1(t) = 2te^{6t}\,.$$ **(1 Punkt)**

Wir können also $c_2(t) = t^2$ wählen. Für c_1 erhalten wir mittels partieller Integration

$$c_1(t) = \int 2te^{6t}dt = 2t\frac{e^{6t}}{6} - \int 2\frac{e^{6t}}{6}dt = t\frac{e^{6t}}{3} - \frac{e^{6t}}{18} + C$$ **(1 Punkt)**

Damit erhalten wir mit der Wahl $C=0$ die partikuläre Lösung:

$$\boldsymbol{x}_p(t) = (\tfrac{t}{3}-\tfrac{1}{18})e^{6t}\cdot e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}. + t^2e^{3t}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} = e^{3t}\cdot\begin{pmatrix}\frac{t}{3}-\frac{1}{18}+2t^2\\ -\frac{t}{3}+\frac{1}{18}+t^2\end{pmatrix}.$$ **(1 Punkt)**

Aufgabe 3: (4 Punkte)

a) Kann es sich bei den Funktionen

$$x_1(t) = e^t, \qquad x_2(t) = e^{2t}, \qquad x_3(t) = e^{it}$$

um ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) + a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = 0 \qquad \text{mit reellen Koeffizienten } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

handeln? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Für welche der folgenden Matrizen $\boldsymbol{A}$ können Sie ohne Kenntnis der Zahl $\gamma \in \mathbb{R}$ einen stabilen stationären Punkt (Gleichgewichtspunkt) des Differentialgleichungssystem $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)$ ausschließen?

$$\textbf{i)}\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \textbf{ii)}\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \textbf{iii)}\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Lösung: (4 Punkte)

a) Nein! Komplexe Lösungen linearer Differentialgleichung mit konstanten reellen Koeffizienten tauchen immer paarweise auf! Wenn e^{it} zum Fundamentalsystem gehört, dann gehört auch e^{-it} zum Fundamentalsystem. Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Die Matrix unter ii) hat den Eigenwert 2. Sie kann keine stabilen Gleichgewichtspunkte haben.

Diese Antwort genügt bereits. Wer mehr als notwendig arbeitet, rechnet möglicher weise folgende Eigenwerte:

i) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = \gamma \pm i$: Stabilität hängt vom Vorzeichen von γ ab!

ii) $\lambda_1 = 2$: instabil!

i) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = \gamma \pm 1$: Stabilität hängt von γ ab!