Aufgabe 1: (7 + 3 Punkte)

a) Berechnen Sie eine reelle Darstellung der Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\ddot{x}(t) + 4x(t) = \cos(2t) \qquad \forall t > 0, \qquad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 8\,.$$

Verwenden Sie zur Bestimmung einer partikulären Lösung den Ansatz

$$x_p(t) = \alpha t \sin(2t)\,.$$

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x(t))^2 \cdot \dot{x}(t) \cdot e^{-t} = 1 + e^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2: (4 + 6 Punkte)

a) Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie den stationären Punkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ des Systems
$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}(t)$ auf Stabilität.

b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 6te^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tipp: Bestimmen sie zunächst die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems und benutzen Sie anschließend die Methode der Variation der Konstanten.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

a) Kann es sich bei den Funktionen

$$x_1(t) = e^t, \qquad x_2(t) = e^{2t}, \qquad x_3(t) = e^{it}$$

um ein Fundamentalsystem für den Lösungsraum der Differentialgleichung

$$\frac{d^3}{dt^3}x(t) + a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = 0 \qquad \text{mit reellen Koeffizienten } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

handeln?

b) Für welche der folgenden Matrizen $\boldsymbol{A}$ können Sie ohne Kenntnis der Zahl $\gamma \in \mathbb{R}$ einen stabilen stationären Punkt (Gleichgewichtspunkt) des Differentialgleichungssystems $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)$ ausschließen?

i) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$, **ii)** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$, **iii)** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$.

Begründen Sie Ihre Antworten!