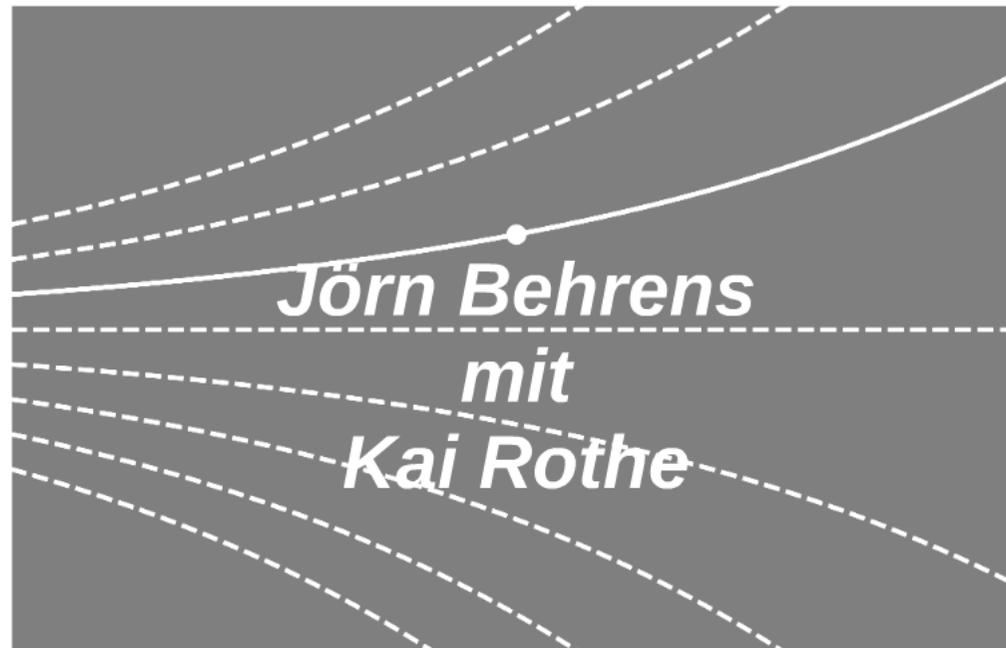


Differentialgleichungen I

Winter 2017/2018



Numerische Verfahren

Buch Kapitel 6.10

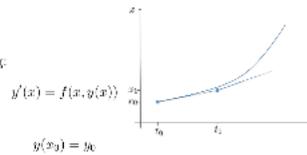
Einführung

Motivation:

- Wir haben eine Reihe von analytischen Lösungsmethoden kennen gelernt. Was aber, wenn die DGL zu kompliziert?
- Mit den bisherigen Sätzen können wir trotzdem Aussagen über die Lösbarkeit machen, allerdings vielleicht nicht die Lösung berechnen.
- **Idee:** Finde eine (Näherungs-) Lösung mit Hilfe numerischer Verfahren!

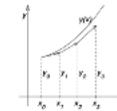
Idee:

- Betrachte DGL 1. Ordnung:
$$y'(x) = f(x, y(x))$$
- Anfangswerte seien
$$y(x_0) = y_0$$
- Beobachtung: In (x_0, y_0) ist mit $y'(x_0) = F(x_0, y_0)$ die Steigung der Lösungsfunktion y bekannt!
- Idee: Nähere die Lösung mit Hilfe der Tangente (Linearisierung) an.



Verfahren: (Integrationsmethode von Euler)

- Betrachte Anfangswertproblem 1. Ordnung:
$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$
- Definiere äquidistante Stützstellen zur Schrittweite h :
$$x_k = x_0 + kh \quad (k = 1, 2, \dots)$$
- Dann erhält man eine Näherung y_k an die exakten Lösungswerte $y(x_k)$ durch
$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
- Die so definierte Methode heißt **Integrationsmethode von Euler**.
Andere Bezeichnungen: Polygonzugmethode, Euler-Verfahren.



Bemerkungen:

- Das Polygonzugverfahren ist nur für sehr kleine h zu verwenden.
- Das Verfahren ist das einfachste explizite Einschritt-Verfahren.



Motivation:

- Wir haben eine Reihe von analytischen Lösungsmethoden kennen gelernt. Was aber, wenn die DGL zu kompliziert?
- Mit den bisherigen Sätzen können wir trotzdem Aussagen über die Lösbarkeit machen, allerdings vielleicht nicht die Lösung berechnen.
- **Idee:** Finde eine (Näherungs-) Lösung mit Hilfe numerischer Verfahren!



Verfahren: (Integrationsmethode von Euler)

Idee:

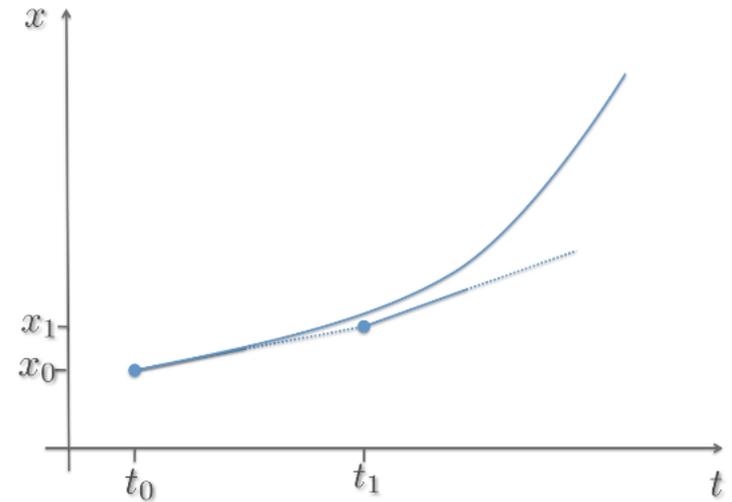
- Betrachte DGL 1. Ordnung:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

- Anfangswerte seien

$$y(x_0) = y_0$$

- Beobachtung: In (x_0, y_0) ist mit $y'(x_0) = F(x_0, y_0)$ die Steigung der Lösungsfunktion y bekannt!
- Idee: Nähere die Lösung mit Hilfe der Tangente (Linearisierung) an.



Verfahren: (Integrationsmethode von Euler)

- Betrachte Anfangswertproblem 1. Ordnung:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

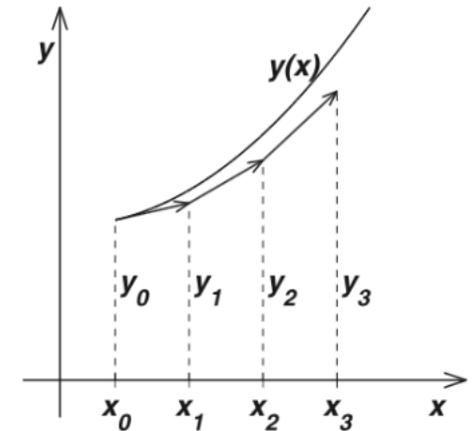
- Definiere **äquidistante Stützstellen** zur Schrittweite h :

$$x_k = x_0 + kh \quad (k = 1, 2, \dots).$$

- Dann erhält man eine Näherung y_k an die exakten Lösungswerte $y(x_k)$ durch

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- Die so definierte Methode heißt **Integrationsmethode von Euler**.
Andere Bezeichnungen: *Polygonzugmethode*, *Euler-Verfahren*.



Bemerkungen:

- Das Polygonzugverfahren ist nur für sehr kleine h zu verwenden.
- Das Verfahren ist das einfachste *explizite Einschritt-Verfahren*.

Diskretisierungsfehler

Notationen:

- Verwende die allgemeine (implizite) Form der Rechenvorschrift

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h).$$

- Hängt Φ nur von x_k, y_k und h ab, so ist eine **explizite** Rechenvorschrift gegeben.
- Hängt Φ auch von y_{k+1} ab, so muss in jedem Zeitschritt i.A. eine nichtlineare Gleichung (**implizit**) gelöst werden.
- Beispiel: Das Euler-Verfahren verwendet $\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h) = f(x_k, y_k)$.

Definition: (lokaler Diskretisierungsfehler)

Der **lokale Diskretisierungsfehler** an der Stelle x_{k+1} ist definiert als

$$d_{k+1} := y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h).$$

Bemerkung: Es handelt sich also um den Fehler, der in einem einzelnen Schritt $x_k \rightarrow x_{k+1}$ gegenüber der exakten Lösung verursacht wird.

Definition: (globaler Diskretisierungsfehler)

Der **globale Diskretisierungsfehler** an der Stelle x_k ist definiert als

$$g_k := y(x_k) - y_k.$$

Bemerkung: Es handelt sich also um den Fehler zwischen der exakten Lösung $y(x_k)$ und der vom numerischen Lösungsverfahren berechneten Lösung y_k .

1

Satz: (Abschätzung des globalen Diskretisierungsfehlers)

Für den globalen Fehler y_k an der festen Stelle $x_k = x_0 + kh$ gilt

- Für eine explizite Einschrittformel

$$|g_k| \leq \frac{D}{kL} (e^{kL} - 1) \leq \frac{D}{kL} e^{kL}.$$

- Für eine implizite Methode:

$$|g_k| \leq \frac{D}{kK} (e^{kL} - 1) \leq \frac{D}{kK} e^{kL}.$$

Dabei ist D eine obere Schranke für den lokalen Diskretisierungsfehler, L die (Lipschitz-)Konstante von der Rechenvorschrift Φ abhängig, und K eine Konstante.

Bemerkungen:

- Für Übergangfunktionen mit geeigneten Eigenschaften (y ist lokal stetig diffbar) kann man zeigen, dass $D \leq 2 \cdot |f'(y)|$, wobei f' die obere Schranke von y'' ist.

- Damit lässt sich beispielsweise für das Polynomverfahren:

$$|g_k| \leq \frac{M}{2} e^{kL} (1 + k) = hC, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Interpretation: Bei fester Stelle x_k und verkleinertem Schrittwert $h = \frac{x_k - x_0}{k}$ (also zunehmendem k) nimmt der globale Fehler proportional zur Schrittwert ab.

Definition: (Fehlerordnung)

Ein Einschrittverfahren $y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h)$ besitzt die **Fehlerordnung** p , falls für den lokalen Diskretisierungsfehler d_k gilt:

$$\max_{k \in \mathbb{N}_n} |d_k| \leq D = \text{const.} \cdot h^{p+1} = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Folgerung:

Der globale Fehler y_k einer expliziten Methode mit Fehlerordnung p ist beschränkt durch

$$|y_k| \leq \frac{\text{const.}}{L} e^{kL} \cdot h^p = \mathcal{O}(h^p).$$

Notationen:

- Verwende die allgemeine (implizite) Form der Rechenvorschrift

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h).$$

- Hängt Φ nur von x_k, y_k und h ab, so ist eine *explizite* Rechenvorschrift gegeben.
- Hängt Φ auch von y_{k+1} ab, so muss in jedem Zeitschritt i.A. eine nichtlineare Gleichung (*implizit*) gelöst werden.
- Beispiel: Das Euler-Verfahren verwendet $\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h) = f(x_k, y_k)$.

Definition: (lokaler Diskretisierungsfehler)

Der **lokale Diskretisierungsfehler** an der Stelle x_{k+1} ist definiert als

$$d_{k+1} := y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\Phi(x_k, y(x_k), y(x_{k+1}), h).$$

Bemerkung: Es handelt sich also um den Fehler, der in einem einzelnen Schritt $x_k \rightarrow x_{k+1}$ gegenüber der exakten Lösung verursacht wird.

Definition: (globaler Diskretisierungsfehler)

Der **globale Diskretisierungsfehler** an der Stelle x_k ist definiert als

$$g_k := y(x_k) - y_k.$$

Bemerkung: Es handelt sich also um den Fehler zwischen der exakten Lösung $y(x_k)$ und der vom numerischen Lösungsverfahren berechneten Lösung y_k .

Satz: (Abschätzung des globaler Diskretisierungsfehlers)

Für den globalen Fehler g_n an der festen Stelle $x_n = x_0 + nh$ gilt

- Für eine explizite Einschrittmethode:

$$|g_n| \leq \frac{D}{hL} (e^{nhL} - 1) \leq \frac{D}{hL} e^{nhL}.$$

- Für eine implizite Methode:

$$|g_n| \leq \frac{D}{hK(1 - hL)} (e^{nhL} - 1) \leq \frac{D}{hK(1 - hL)} e^{nhL}.$$

Dabei ist D eine obere Schranke für den lokalen Disrektisierungsfehler, L eine (Lipschitz-) Konstante die von der Rechenvorschrift Φ abhängt, und K eine Konstante.

Bemerkungen:

- Für Lösungsfunktionen mit genügenden Eigenschaften (z.B. zweimal stetig diff'bar) kann man zeigen, dass $D \leq \frac{1}{2}h^2M$ gilt, wobei M eine obere Schranke von y'' ist.
- Damit ergibt sich beispielsweise für das Polygonzugverfahren:

$$|g_n| \leq h \frac{M}{2L} e^{L(x_n - x_0)} =: hC, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Interpretation: Bei fester Stelle x_n und verkleinerter Schrittweite $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ (also zunehmendem n) nimmt der globale Fehler proportional zur Schrittweite ab.

Definition: (Fehlerordnung)

Ein Einschrittverfahren $y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h)$ besitzt die **Fehlerordnung** p , falls für den lokalen Diskretisierungsfehler d_k gilt:

$$\max_{1 \leq k \leq n} |d_k| \leq D = \text{const.} \cdot h^{p+1} = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Folgerung:

Der globale Fehler g_n einer expliziten Methode mit Fehlerordnung p ist beschränkt durch

$$|g_k| \leq \frac{\text{const.}}{L} e^{nhL} \cdot h^p = \mathcal{O}(h^p).$$



Trapezmethode

Idee: (Methode von Simpson-Equation)

- 2d. Methode mit Abschätzung $n > 1$
- Rechnet y_n mit Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ in das Intervall $[a, b]$ mit $n_1 = \frac{n}{2}$ Schritte

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{1}{3} f(x_n) + \frac{4}{3} f(x_{n+1}) + \frac{1}{3} f(x_{n+2}) \right)$$

- Reihenfolge **unabhängig** von n

$$S = \sum_{k=1}^n y_k \cdot h(x_k) \quad \text{Okt. 19}$$

Hochführung: (Verbesserte Polygonzug-Methode)

- Statt Anwendung der Richardson-Extrapolation auf das Ergebnis von zwei Polygonzug-Methoden (PZ) werden Extrapolationen in jedem Schritt auf
- **Nennschritt**: PZV mit h

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

- **Doppelschritt**: PZV zweimal angeführt mit $\frac{h}{2}$

$$y_{n+1}^{(2)} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1}^{(3)} = y_{n+1}^{(1)} + \frac{h}{2} f(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+1}^{(1)})$$

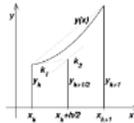
- **Richardson-Extrapolation**:

$$y_{n+1} = \frac{2y_{n+1}^{(2)} - y_{n+1}^{(1)}}{2-1}$$

$$= 2y_{n+1}^{(2)} - y_{n+1}^{(1)} = 2\left(y_n + \frac{h}{2} f(x_n + \frac{h}{2}, y_n)\right) - \left(y_n + h f(x_n, y_n)\right)$$

$$= 2y_n + h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n) + h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n) - y_n - h f(x_n, y_n)$$

$$= y_n + h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n) + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$$



Idee: (Methode von Runge)

- Rechnet in der 1. Iteration lediglich einen Schritt:

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(1)})]$$

- D.h. 1. iter. Methode ermittelte **Prüfwerte** $y_{n+1}^{(1)}$, rechnerische bestimmte Schätzwerte y_n, y_{n+1}

- Eine signale **kein veränderter** reiner **Richardson-Extrapolation**:

$$y_n = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(1)})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(1)})]$$

Algorithmus: (Verbesserte Polygonzug-Methode)

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + h k_2$$

Bemerkung: die **Verbesserte Polygonzugmethode** verwendet

$$\psi(x_{n+1}, y_{n+1}, h) = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$$

Idee: (Trapezmethode)

- Neue Idee: Integriere die DGL $y'(x) = f(x, y(x))$ für einen Zeitschritt und erhalte

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$$

- Löse das Integral mit Hilfe einer (numerischen) Quadraturformel (hier Trapezregel):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

- Erhalte implizites Verfahren, die **Trapezmethode**

Bemerkungen: (Trapezmethode)

- Da die implizite Lösung meist ein nichtlineares Problem enthält, löse mittels Fixpunkt-Iteration:

$$y_{k+1}^{(s)} = y_k + f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1}^{(s+1)} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(s)})] \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

- Erhalte Konvergenz, falls $|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L|y - y^*|$ (Lipschitz-stetig) und $\frac{hL}{2} < 1$ (Banachscher Fixpunktsatz).

Idee: (Methode aus Richardson-Extrapolation)

- Ziel: Methode mit Fehlerordnung $p > 1$.
- Berechne y_n mit Schrittweite $h_1 = h$ und dieselbe Stelle y_{2n} mit $h_2 = \frac{h}{2}$, erhalte

$$\begin{aligned}y_n &\approx y(x) + c_1 h + \mathcal{O}(h^2) \\y_{2n} &\approx y(x) + c_1 \frac{h}{2} + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

- Richardson-Extrapolation ergibt dann

$$\tilde{y} = 2y_{2n} - y_n \approx y(x) + \mathcal{O}(h^2).$$

Herleitung: (Verbesserte Polygonzug-Methode)

- Statt Anwendung der Richardson-Extrapolation auf das Ergebnis von zwei Polygonzug-Verfahren (PZV), wende Extrapolation in jedem Schritt an!

- **Normalschritt:** PZV mit h :

$$y_{k+1}^{(1)} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

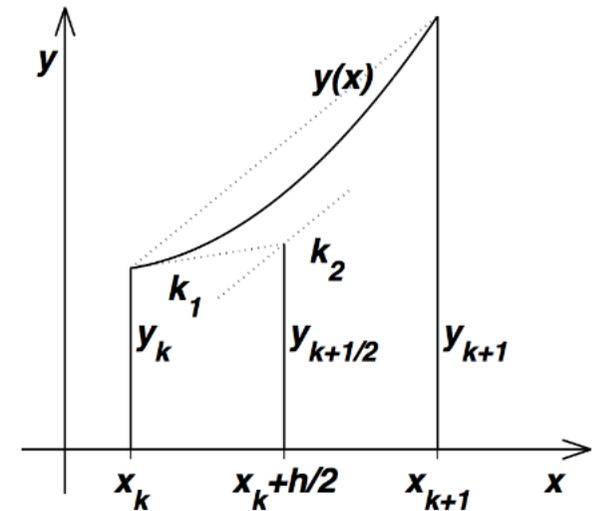
- **Doppelschritt:** PZV zweimal ausgeführt mit $\frac{h}{2}$:

$$y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} = y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1}^{(2)} = y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} + \frac{h}{2}f(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)})$$

- **Richardson-Extrapolation:**

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= 2y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} - y_{k+1}^{(1)} \\ &= 2y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)} + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)}) - y_k - hf(x_k, y_k) \\ &= 2y_k + hf(x_k, y_k) + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}}^{(2)}) - y_k - hf(x_k, y_k) \\ &= y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k)). \end{aligned}$$



Algorithmus: (Verbesserte Polygonzug-Methode)

$$k_1 = f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + hk_2$$

Bemerkung: die **Verbesserte Polygonzugmethode** verwendet

$$\Phi(x_k, y_k, y_{k+1}, h) = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k)\right).$$

Idee: (Trapezmethode)

- Neue Idee: Integriere die DGL $y'(x) = f(x, y(x))$ für einen Zeitschritt und erhalte

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx$$

- Löse das Integral mit Hilfe einer (numerischen) Quadraturformel (hier Trapezregel):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

- Erhalte implizites Verfahren, die **Trapezmethode**.

Bemerkungen: (Trapezmethode)

- Da die implizite Lösung meist ein nichtlineares Problem enthält, löse mittels Fixpunkt-Iteration:

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + f(x_k, y_k)$$
$$y_{k+1}^{(s+1)} = y_k + \frac{h}{2} \left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(s)}) \right] \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

- Erhalte Konvergenz, falls $|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L|y - y^*|$ (Lipschitz-stetig) und $\frac{hL}{2} < 1$ (Banachscher Fixpunktsatz).

Idee: (Methode von Heun)

- Iteriere in der Fixpunktiteration lediglich einen Schritt:

$$y_{k+1}^{(p)} = y_k + f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(p)}) \right].$$

- D.h. Euler Methode ermittelt **Prediktorwert** $y_{k+1}^{(p)}$, Trapezmethode bestimmt *korrigierten Wert* y_{k+1} .
- Das folgende **Heun-Verfahren** ist eine **Prädiktor-Korrektor-Methode**:

$$k_1 = f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = f(x_k + h, y_k + hk_1)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [k_1 + k_2]$$

Runge-Kutta Verfahren

Vorbemerkungen:

- Die Methode von Heun und das verbesserte Polygonzugverfahren sind Beispiele für explizite zweistufige Runge-Kutta Verfahren mit Fehlerordnung 2.
- Für die Beschreibung von Runge-Kutta Verfahren mit höheren Fehlerordnungen stützen wir uns von der Integralgleichung

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx.$$

- Verwende zur Berechnung des Integrals eine allgemeine Quadraturformel mit 3 Stützstellen im Intervall $[x_k, x_{k+1}]$. Das führt auf den Ansatz:

$$y_{k+1} = y_k + h[c_1 f(\xi_1, y(\xi_1)) + c_2 f(\xi_2, y(\xi_2)) + c_3 f(\xi_3, y(\xi_3))].$$

- Dabei seien $c_1 + c_2 + c_3 = 1$, ξ_i die Stützstellen.

Bestimmung der Stützstellen und Werte:

- Wähle Stützstellen

$$\xi_1 = x_k, \quad \xi_2 = x_k + a_2 h, \quad \xi_3 = x_k + a_3 h, \quad 0 < a_2, a_3 \leq 1.$$

- Wegen $\xi_1 = x_k$ ist $y(\xi_1) = y_k$.

- Für $y(\xi_2)$ und $y(\xi_3)$ verwende Picard-Annäherung:

$$\begin{aligned} y(\xi_2) &= y_k^* = y_k + h b_{21} f(x_k, y_k) \\ y(\xi_3) &= y_k^{**} = y_k + h b_{31} f(x_k, y_k) + h^2 b_{32} f(x_k, y_k^*). \end{aligned}$$

- Man erhält Parameter $a_1, a_2, b_{21}, b_{31}, b_{32}, c_1, c_2, c_3$, die so gewählt werden, dass eine optimale Fehlerordnung erreicht wird.

Algorithmus: (3 Stufiges Runge-Kutta Verfahren)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + a_2 h, y_k + h b_{21} k_1) \\ k_3 &= f(x_k + a_3 h, y_k + h(b_{31} k_1 + b_{32} k_2)) \\ y_{k+1} &= y_k + h[c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3]. \end{aligned}$$

Beispiel: Das Heun-Verfahren dritter Ordnung erhält man durch die folgende Wahl der Parameter:

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{3}{4}, \quad b_{21} = \frac{2}{3}, \quad b_{31} = a_3, \quad b_{32} = 0.$$

Vorbemerkungen:

- Die Methode von Heun und das verbesserte Polygonzugverfahren sind Beispiele für explizite zweistufige **Runge-Kutta Verfahren** mit Fehlerordnung 2.
- Für die Beschreibung von Runge-Kutta Verfahren mit höheren Fehlerordnungen starten wir von der Integralgleichung

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx.$$

- Verwende zur Berechnung des Integrals eine allgemeine Quadraturformel mit 3 Stützstellen im Intervall $[x_k, x_{k+1}]$. Das führt auf den Ansatz:

$$y_{k+1} = y_k + h[c_1 f(\xi_1, y(\xi_1)) + c_2 f(\xi_2, y(\xi_2)) + c_3 f(\xi_3, y(\xi_3))].$$

- Dabei seien $c_1 + c_2 + c_3 = 1$, ξ_i die Stützstellen.

Bestimmung der Stützstellen und Werte:

- Dabei seien $c_1 + c_2 + c_3 = 1$, ξ_i die Stützstellen.

Bestimmung der Stützstellen und Werte:

- Verwende Stützstellen

$$\xi_1 = x_k, \quad \xi_2 = x_k + a_2 h, \quad \xi_3 = x_k + a_3 h, \quad 0 < a_2, a_3 \leq 1.$$

- Wegen $\xi_1 = x_k$ ist $y(\xi_1) = y_k$.
- Für $y(\xi_2)$ und $y(\xi_3)$ verwende Prädiktor-Ansatz:

$$y(\xi_2) : \quad y_2^* = y_k + h b_{21} f(x_k, y_k)$$

$$y(\xi_3) : \quad y_3^* = y_k + h b_{31} f(x_k, y_k) + h b_{32} f(x_k + a_2 h, y_2^*).$$

- Man erhält Parameter $a_1, a_2, b_{21}, b_{31}, b_{32}, c_1, c_2, c_3$, die so gewählt werden, dass eine optimale Fehlerordnung erreicht wird.

- man erhält Parameter $\omega_1, \omega_2, \omega_{21}, \omega_{31}, \omega_{32}, c_1, c_2, c_3$, die so gewählt werden, dass eine optimale Fehlerordnung erreicht wird.

Algorithmus: (3-Stufiges Runge-Kutta Verfahren)

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_k, y_k) \\k_2 &= f(x_k + a_2h, y_k + hb_{21}k_1) \\k_3 &= f(x_k + a_3h, y_k + h(b_{31}k_1 + b_{32}k_2)) \\y_{k+1} &= y_k + h[c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3].\end{aligned}$$

Beispiel: Das **Heun-Verfahren dritter Ordnung** erhält man durch die folgende Wahl der Parameter:

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{3}{4}, \quad b_{32} = \frac{2}{3}, \quad b_{31} = a_3 - b_{32} = 0.$$

