DGL I

23.01.2018

J. Behrens

① Beispiel Autonomes System: Räuber-Beute-Modell

- Modell: Sei x # Beutetiere
  y # Räuber / Jäger
- Wachstum der Beutetiere kann als exponentiell angenommen werden: $x = x_0 e^{ax}$

  Dies ist die Lösung einer DGL: $\dot{x} = ax$
- Das Zusammentreffen von Räubern und Beutetieren ist proportional zu $x \cdot y$

  $\Rightarrow \boxed{\dot{x} = ax - bx \cdot y}$ "Beutetiergleichung"
- Räuber sterben, wenn keine Beutetiere da sind $\dot{y} = -dy$

  andererseits wächst die Jägerpopulation proportional zum Zusammentreffen mit Beutetieren

  $\Rightarrow \boxed{\dot{y} = cx \cdot y - dy}$ "Räubergleichung"

- Stationärer Zustand: Falls sich die Zahl der Räuber und der Beutetiere nicht ändert (zeitlich), gilt

$$0 = ax - bxy \quad \text{und} \quad 0 = cxy - dy$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{d}{c} \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{a}{b}$$

- Nichtstationäre Lösungen:

Ansatz:

$$\frac{d}{x} \cdot \dot{x} + \frac{a}{y} \dot{x} = \cancel{ad} - bdy + acx - \cancel{ad}$$

$$= acx - cbxy + cbxy - bdy$$

$$= c(ax - bxy) + b(cxy - dy)$$

$$= c\dot{x} + b\dot{y}$$

- Integration: $d \ln x + a \ln y - cx - by = \text{const.}$

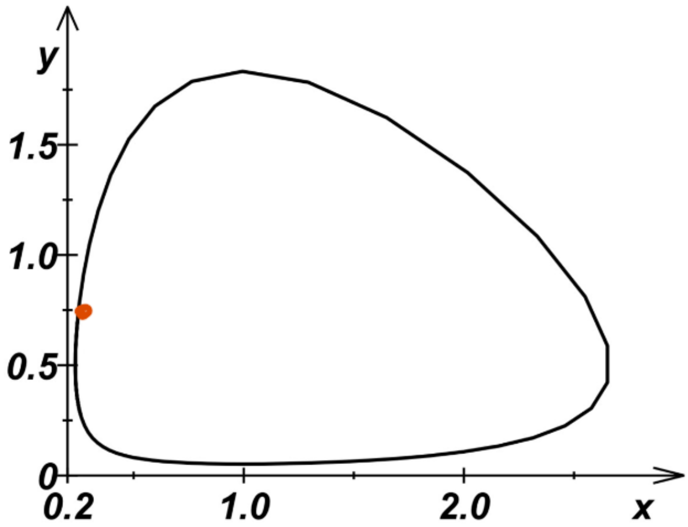
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \Big(\underbrace{d \ln x - a \ln y - cx - by}_{=: E(x,y)} \Big) = 0$$

- $E(x,y)$ (wie oben definiert) ist auf jeder Lösungskurve konstant.

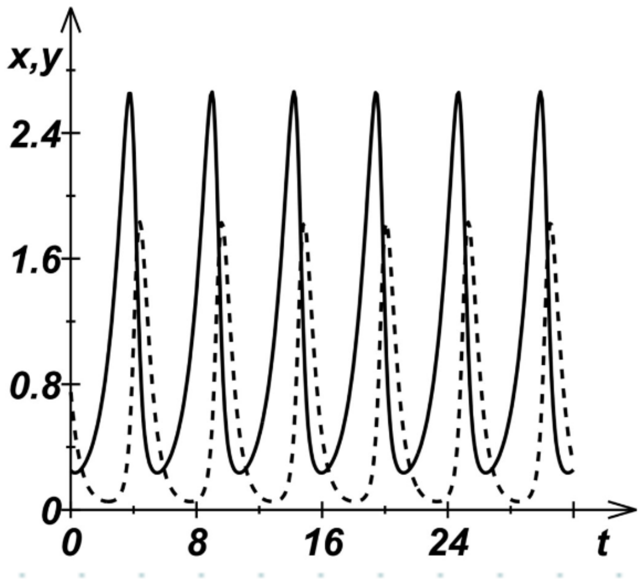
Erhaltungsgröße des Systems.

- Jede Lösung verläuft auf einer Niveaulinie von E.

• Für $a=1$, $b=c=d=2$, $(x_0, y_0) = (0{,}25 ; 0{,}75)$ ergibt sich



• Zeitlich periodische Verhalten der beiden Populationen



② lineares autonomes System mit $n=2$:

- 4 Konstellationen für die Eigenwerte (EW) von A, $Ax=\dot{x}$, $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, d.h. die Matrix λ_1,λ_2 als EW.

  a) $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ und $\lambda_1\neq\lambda$ mit $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ Eigenvektoren (EV)

  $$\Rightarrow \quad \vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{e}_2$$

  b) λ hat algebraische und geometrische Vielfachheit 2, $\vec{e}_1\neq\vec{e}_2$ EV:

  $$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\vec{e}_1 + c_2 e^{\lambda t}\vec{e}_2 \,.$$

  c) λ hat algebr. Vielfachheit 2, aber geom. Vielfachheit 1, $\vec{e}_1$ EV, $\vec{e}_2$ Hauptvektor

  $$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\vec{e}_1 + c_2 t e^{\lambda t}\vec{e}_2$$

  d) $\lambda_1 = a+ib\in\mathbb{C} \Rightarrow \lambda_2=\overline{\lambda_1}\in\mathbb{C}$ mit EV $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$:

  $$\Rightarrow \vec{x}(t) = c_1 e^{at}e^{ibt}\vec{e}_1 + c_2 e^{at}e^{-ibt}\vec{e}_2$$

- Schätze den Abstand einer Lösung $\vec{x}(t)$ zu $\vec{x}_0=\vec{0}$ ab:

  a), b): $$|\vec{x}(t)-\vec{x}_0|^2 = |c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{e}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{e}_2|^2$$
  $$= (e^{\lambda_1 t}c_1 e_{11} + e^{\lambda_2 t}c_2 e_{21})^2 + (e^{\lambda_1 t}c_1 e_{12} + e^{\lambda t}c_2 e_{22})^2$$

  $$\Rightarrow |\vec{x}(t)-\vec{x}_0| \to 0 \quad \text{für } t\to\infty \text{ falls } \lambda_i<0 \quad (i=1,2)$$
  $$\to\infty \quad \text{für } t\to\infty \text{ falls } \lambda_1>0 \text{ oder } \lambda_2>0$$

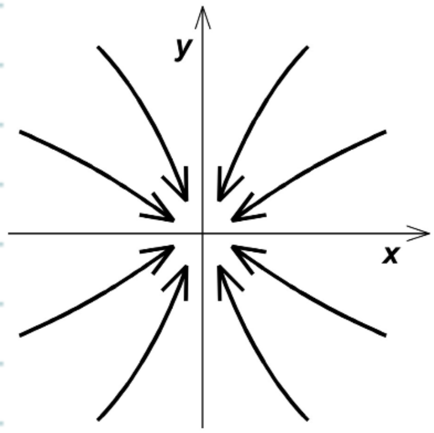
Bem: c): $|\vec{x}(t) - \vec{x}_0| \to 0$ falls $\lambda < 0$

$\to \infty$ falls $\lambda \geq 0$

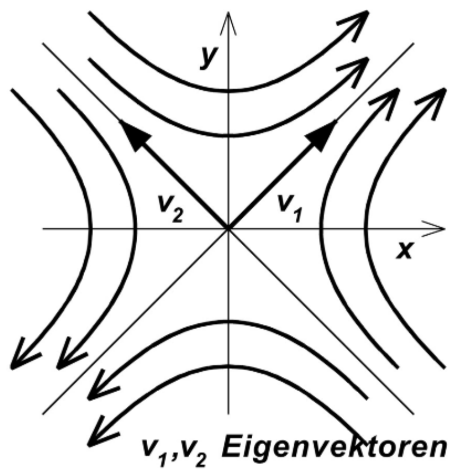
d): $|\vec{x}(t) - \vec{x}_0| \to 0$ falls $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2 = a < 0$

$\to \infty$ andernfalls

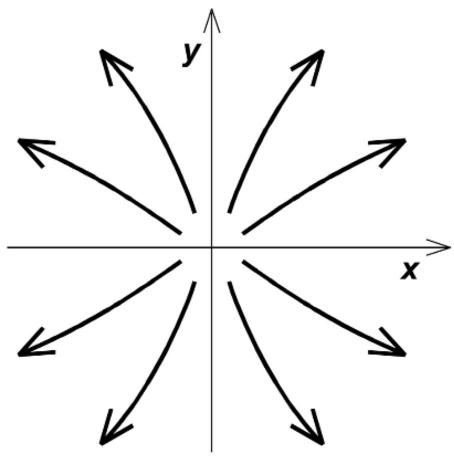
- Phasenportrait:



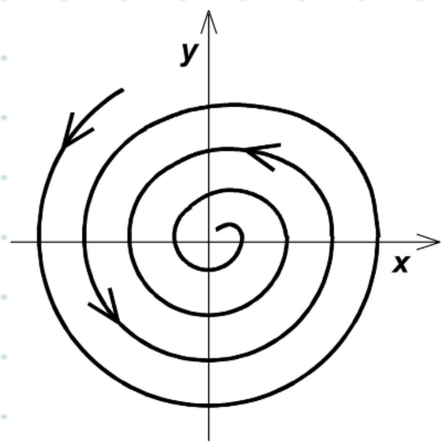
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$



$\lambda_1 > 0 \quad , \quad \lambda_2 < 0$



$\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$



$\lambda = a + ib$ mit $a < 0$