DGL I

16. 01. 2018

J. Behrens

① Anwendung des Orthogonalitätssatzes

- Betrachte: $-y'' = \lambda y \quad ; \quad y(0) = y(\ell) = 0 \quad , x \in [0, \ell]$

  $\longrightarrow L[y] = y'' \qquad p \equiv 1 \; , \; w \equiv 1$

- Allgemeine Lösung der DGL:

  $$\left.\begin{aligned} \lambda \neq 0 &: \quad y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \\ \lambda = 0 &: \quad y(x) = c_1 + c_2 x \end{aligned}\right\} c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Randbedingungen:

  $\lambda \leq 0 \quad \Rightarrow$ Es ex. nur die triviale Lösung!

  $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = \cos\sqrt{\lambda}\, x \; , \; y_2(x) = \sin\sqrt{\lambda}\, x$ bilden ein Fundamentalsystem

  $$\Rightarrow y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

  Es gilt: $y(0) = y(\ell) = 0 \Rightarrow 0 = y(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = c_1$

  $$0 = y(\ell) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, \ell$$

$\Rightarrow \quad c_1 = 0 \quad$ und $\quad \underbrace{c_2 = 0}$ oder $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\,l = \pi k \quad k \in \mathbb{N}$

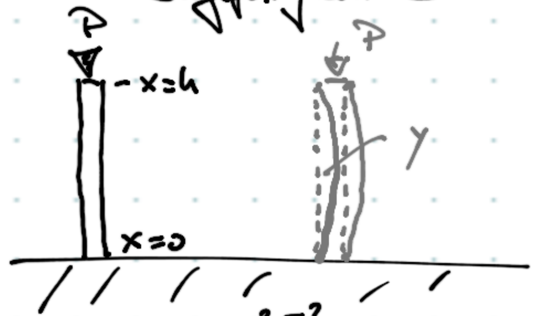
diesen Fall schließen wir aus, da sonst $y(x) = 0$ triviale Lösung

- Eigenwerte: Es ergibt sich $\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2}$ sind Eigenwerte.
- Eigenfunktionen: $y_k(x) = \sin k\pi \frac{x}{l}$
- Orthogonalität: Für $\lambda_k \neq \lambda_j \quad (j \neq k)$

$$\langle y_k, y_j \rangle = \int_0^l \sin k\pi \frac{x}{l} \sin j\pi \frac{x}{l}\, dx = 0$$

- Anwendung: $\boxed{-y'' = \lambda y \quad \text{mit } y(0) = y(h) = 0 \quad \lambda = \frac{P}{B}}$

Beschreibt die Auslenkung eines Trägers der Höhe h in Abhängigkeit der Last (Kraft) P und der Biegefestigkeit B



- Lösungen: $y_k(x) = c \sin\sqrt{\frac{P}{B}}\,x \quad$ falls $\frac{P}{B} = \frac{k^2\pi^2}{h^2}$

d.h. Kraft P ist proportional zur Biegefestigkeit B.

- Fallunterscheidung:

  i) Falls $P < P_1 = B\frac{\pi^2}{h^2} \Rightarrow \lambda = \frac{P}{B} < \frac{\pi^2}{h^2}$

  $\Rightarrow$ Es ex. nur die triviale Lösung, also keine Auslenkung.

  ii) Falls $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{h^2} \Rightarrow P_1 = B\frac{\pi^2}{h^2} \Rightarrow y_1(x) = c \sin\frac{\pi}{h}x$

  $\rightarrow$ sinusförmige Auslenkung.

  <u>Bem</u>: P_1 heißt Eulersche Knicklast.

② <u>Beispiel</u>:

- Betrachte $\quad -y'' = \lambda y \qquad y(0) = y(\pi) = 0$

- Eigenwerte: $\quad \lambda_k = k^2 \quad , k \in \mathbb{N}$

- Eigenfunktionen: $\quad y_k(x) = c \sin kx \qquad c \neq 0$

- Normiert: $\quad \langle y_k, y_k \rangle = \int_0^\pi c \sin kx \, c \sin kx \, dx = 1$

  mit $\int_0^\pi \sin^2 kx \, dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

  $\Rightarrow y_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$

- Reihenentwicklung: (Anwendung des Satzes)

  $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx \qquad (f(0) = f(\pi) = 0)$$

mit $\quad b_k = \langle f, y_k \rangle = \int_0^{\pi} f(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx \, dx$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

d.h. $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{b}_k \sin kx$

mit $\quad \tilde{b}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$

Das ist die Fourier-Reihe der auf $[0,\pi]$ gegebenen und ungerade fortgesetzten Funktion f mit Periode 2π