DGL I

12.12.2017

J. Behrens

① Beispiel a)

- Betrachte $y'' + 9y = \cos(2x)$, $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = -1$
- Laplace-Trafo:

$$\mathcal{L}[y'' + 9y] = \mathcal{L}[y''] + 9\mathcal{L}[y] = \underbrace{\mathcal{L}[\cos(2x)]}_{= \frac{z}{z^2+4}}$$

- Rechenregeln + Tabelle:

$$z^2 \mathcal{L}[y] - z y(0) - y'(0) + 9\mathcal{L}[y] = \frac{z}{z^2+4}$$

$(y(0)=1)$

$$\Rightarrow \quad (z^2+9)\mathcal{L}[y] - z - y'(0) = \frac{z}{z^2+4}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[y] = \frac{z + y'(0)}{(z^2+9)} + \frac{z}{(z^2+9)(z^2+4)}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{4}{5}\frac{z}{z^2+9} + \frac{y'(0)}{(z^2+9)} + \frac{z}{5(z^2+4)}$$

- Tabelle: $\mathcal{L}[y] = \frac{4}{5}\mathcal{L}[\cos(3x)] + \frac{y'(0)}{3}\mathcal{L}[\sin(3x)] + \frac{1}{5}\mathcal{L}[\cos(2x)]$
- Eindeutigkeit: $y(x) = \frac{4}{5}\cos(3x) + \frac{y'(0)}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\cos(2x)$

- zur Bestimmung von $y'(0)$ setze $y(\frac{\pi}{2}) = -1$

$$\Rightarrow -1 = -\frac{y'(0)}{3} - \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow y'(0) = \frac{12}{5}$$

- Lösung: $y(x) = \frac{4}{5}\cos(3x) + \frac{4}{5}\sin(3x) + \frac{1}{5}\cos(2x)$

<u>Beispiel b)</u>

- Betrachte System:

$$\begin{aligned} u' &= u + 5v \\ v' &= -(u+3v) \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} u(0) &= 1 \\ v(0) &= 0 \end{aligned}$$

- Laplace-Trafo:

$$\begin{aligned} -u(0) + z\mathcal{L}[u] &= \mathcal{L}[u] + 5\mathcal{L}[v] \\ -v(0) + z\mathcal{L}[v] &= -\mathcal{L}[u] - 3\mathcal{L}[v] \end{aligned}$$

- Einsetzen der Anfangsbed.:

$$\Rightarrow \begin{aligned} (z-1)\mathcal{L}[u] - 5\mathcal{L}[v] &= 1 \\ \mathcal{L}[u] + (z+3)\mathcal{L}[v] &= 0 \end{aligned}$$

- Lösung des lin. Gleichungssystems:

$$\Rightarrow \mathcal{L}[u] = \frac{z+3}{z^2+2z+2} \qquad \mathcal{L}[v] = \frac{-1}{z^2+2z+2}$$

- Quadratische Ergänzung:

$$\mathcal{L}[u] = \frac{(z+1)}{(z+1)^2+1} + \frac{2}{(z+1)^2+1}$$

$$\mathcal{L}[v] = -\frac{1}{(z+1)^2+1}$$

- Tabelle : $\mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x]$

  $\mathcal{L}[v] = \mathcal{L}[-e^{-x}\sin x]$

- Eindeutigkeit : $u(x) = e^{-x}(\cos x + 2\sin x)$

  $v(x) = -e^{-x}\sin x$