DGL I

05.12.2017

J. Behrens

① Beispiel:

Betrachte: $y'' + 5y' + 6y = xe^{-x}$

Ansatz nach Art der rechten Seite: $y_p(x) = ae^{-x} + bxe^{-x}$

Ableitungen: $y_p'(x) = -ae^{-x} + be^{-x} - bxe^{-x}$

$$y_p''(x) = ae^{-x} - be^{-x} - be^{-x} + bxe^{-x} = ae^{-x} - 2be^{-x} + bxe^{-x}$$

Einsetzen:

$$ae^{-x} - 2be^{-x} + bxe^{-x} - 5ae^{-x} + 5be^{-x} - 5bxe^{-x} + 6ae^{-x} + 6bxe^{-x} = xe^{-x}$$

$$\Rightarrow (2a + 3b)e^{-x} + 2bxe^{-x} = xe^{-x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2a + 3b)}_{\Rightarrow 2a = -\frac{3}{2}} e^{-x} + \underbrace{(2b - 1)}_{\Rightarrow b = \frac{1}{2}} xe^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

Allg. Lösung: $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{3}{4}e^{-x}$

② **Beispiel:** $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = g(x)$

$$g(x) = A e^{\lambda x} \quad , \; A, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ansatz: $y_p(x) = B e^{\lambda x}$

Einsetzen: $B\, P(\lambda)\, e^{\lambda x} = A e^{\lambda x}$ $\qquad P(\lambda)$ charakt. Polynom

Partikuläre Lösung: $(P(\lambda) \neq 0)$

$$y_p(x) = B e^{\lambda x} = \frac{A}{P(\lambda)} e^{\lambda x}$$

das heißt: Dieser Ansatz ist nur möglich, falls $P(\lambda) \neq 0$

d.h. λ ist keine Nullstelle des char. Polynoms,

damit keine Lösung der homogenen Gleichung

$\longrightarrow$ keine Resonanz!

Falls λ k-fache Nullstelle von $P(\lambda)$ ist, so wähle Ansatz:

$$y_p(x) = B x^k e^{\lambda x}$$

Einsetzen: $y_p(x) = B x^k e^{\lambda x} = \dfrac{A}{P^{(k)}(\lambda)} x^k e^{\lambda x}$

Konkret: Betrachte $y'' - y = 4e^x$

Auswertung charakt. Polynom: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$

Fundamentallösungen der homog. Gl.: $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$

Beobachtung: da die rechte Seite der Gl. Lösung der homogenen DGL

$\rightarrow$ Resonanzfall!

$\lambda = 1$ hat Vielfachheit 1

$\rightarrow$ Ansatz: $y_p(x) = axe^x$

Einsetzen: $y_p'(x) = ae^x + axe^x$, $y_p''(x) = ae^x + ae^x + axe^x$

$\Rightarrow 2ae^x + axe^x - axe^x = 4e^x$

$\Rightarrow a = 2$

Allgem. Lösung: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 2xe^x$

③ Betrachte: $y'' + xy' + y = 0$ (*)

und $y' + xy = x$ (**)

Bemerkung: Falls (*) und (**) dasselbe Problem im Rahmen einer mathematischen Modellierung beschreiben, so gilt es die "richtigen" Lösungen zu finden.

Lösung von (**): $y(x) = c\,e^{-\frac{x^2}{2}} + 1$

Lösung von (*):

1. homogene DGL: $y'' + xy' + y = 0$

$u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ist bereits bekannt

Ziel: finde eine zweite Fundamentallösung

Suche $v(x)$ mit Ansatz $v(x) = w(x) \cdot u(x)$ (Methode der Reduktion der Ordnung)

Erhalte: $w''u + 2w'u' + wu'' + xw'u + xwu' + wu$

$$= w''u + 2w'u' + xw'u + w\underbrace{(u'' + xu' + u)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow w''u + (2u' + xu)w' = 0$$

Substitution: $\Omega = w'$

$$\Rightarrow \Omega' u + \Omega(2u' + xu) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Omega'}{\Omega} = -\frac{2u' + xu}{u}$$

Einsetzen: $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\Rightarrow \frac{\Omega'}{\Omega} = x \quad \Rightarrow \Omega = c^* e^{\frac{x^2}{2}}$$

Integration: $w(x) = c^* \int_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi \Rightarrow v(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi \right).$

- 2. Partikuläre Lösung: $y_p(x) = 1$

- Allgem. Lösung: $z(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x) + 1$

- Bleibt z.z.: u, v bilden Fundamentalsystem

$$W(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-\frac{x^2}{2}} & e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi \\ -x e^{-\frac{x^2}{2}} & 1 - x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi \end{vmatrix}$$

Für $x = 0 \quad \Rightarrow W(x) = 1 \neq 0$, d.h. u, v Fundamentalsystem bilden.

- Beobachtung: $z(x)$ ist nur dann Lösung des Problems (**) (DGL 1. Ordnung), wenn $c_2 = 0$!