DGL I

28.11.2017

J. Behrens

① Nullstellenverhalten von $P(\lambda)$:

Fall 1: $P(\lambda)$ besitzt n verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ Die homogene DGL $L[y] = 0$ n Lösungen

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

Fall 2: $P(\lambda)$ besitzt eine Nullstelle $\lambda_k \in \mathbb{C}$

- $e^{\lambda x}$ ist sinnvoll für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\frac{d}{\partial x} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

  $\rightarrow$ $e^{\lambda_k x}$ löst die homogene DGL für $\lambda_k \in \mathbb{C}$.

- Falls $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, \dots, n-1)$, so gibt es für $e^{\lambda_k x}$ (komplex) zwei reellwertige Lösungen

- Seien $y_1(x), y_2(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ reellwertige Fktn. und

  $y(x) = y_1(x) + i y_2(x)$ komplexwertig.

$\Rightarrow$ $y'(x) = y_1'(x) + i y_2'(x)$ bzw. $y^{(l)}(x) = y_1^{(l)}(x) + i y_2^{(l)}(x)$

$l \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y(x) = \left[y_1^{(n)}(x) + a_{n-1} y_1^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y_1(x) \right] +$$
$$+ i \left[y_2^{(n)}(x) + a_{n-1} y_2^{(n-1)}(x) + \dots + a_0 y_2(x) \right]$$
$$= 0$$

- Also müssen Re und Im verschwinden!

$$y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \dots + a_0 y_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \dots + a_0 y_2 = 0$$

- $y(x)$ ist Lösung von $L[y]=0$

$\Leftrightarrow$ $y_1 = \mathrm{Re}\, y$ und $y_2 = \mathrm{Im}\, y$ sind Lösungen.

- Verwende Eulersche Formel: $e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$, $\phi \in \mathbb{R}$

und Additionstheorem: $e^{(a+ib)} = e^a e^{ib}$, $a, b \in \mathbb{R}$

schreibe $\lambda_k = \sigma_k + i \tau_k$

$\Rightarrow$
$$y_k(x) = e^{\lambda_k x} = e^{\sigma_k x} (\cos \tau_k x + i \sin \tau_k x)$$

$\Rightarrow$ erhalte die beiden reellen Lösungen

$$e^{\sigma_k x} \cos \tau_k x \quad \text{und} \quad e^{\sigma_k x} \sin \tau_k x$$

- Da mit $\lambda_k \in \mathbb{C}$ auch $\bar{\lambda}_k$ Nullstelle von $P(\lambda)$ ist,

$$\Rightarrow e^{\sigma_k x} \cos(-\tau_k x) = e^{\sigma_k x} \cos \tau_k x$$
$$e^{\sigma_k x} \sin(-\tau_k x) = -e^{\sigma_k x} \sin \tau_k x$$

sind (bis auf Vorzeichen) dieselben Lösungen

<u>Fall 3</u>: $P(\lambda)$ besitzt r-fache Nullstelle λ_1 ($r \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)

Dann ist $y(x) = e^{\lambda_1 x}$ Lösung.

- Es gilt: $\frac{\partial^2 e^{\lambda x}}{\partial x \partial \lambda} = \frac{\partial^2 e^{\lambda x}}{\partial \lambda \partial x}$ nach Satz von Schwarz, da beide part. Ableitung von $f(\lambda, x) = e^{\lambda x}$ stetig sind

- Daher: $\frac{\partial L[e^{\lambda x}]}{\partial \lambda} = L\left[\frac{\partial e^{\lambda x}}{\partial \lambda}\right] = L[x e^{\lambda x}]$

- Damit: $L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} P(\lambda) = e^{\lambda x} (\lambda - \lambda_1)^r (\lambda - \lambda_{r+1}) \cdots$
$\cdot (\lambda - \lambda_n)$
$=: e^{\lambda x} (\lambda - \lambda_1)^r \cdot Q(\lambda)$

- Differentiation

$$L[x e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} [x \underline{(\lambda - \lambda_1)^r} Q(\lambda) + r \underline{(\lambda - \lambda_1)^{r-1}} Q(\lambda) + \underline{(\lambda - \lambda)^r} Q'(\lambda)]$$

- Da $r \geq 2$ verschwindet die Rechte Seite für $\lambda = \lambda_1$, d.h.

$y = x e^{\lambda_1 x}$ ist Lösung von $L[y] = 0$

- Wiederhole $r-1$ Male:

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{r-1} e^{\lambda_1 x}$$

sind Lösungen der homogenen DGL.

② Beispiel:

- Betrachte $y'' - 4y = 0$
- Charakteristisches Polynom: $\lambda^2 - 4 = P(\lambda)$
- Nullstellen: $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -2$
- Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^{2x}$ und $y_2(x) = e^{-2x}$
- Allgemeine Lösung: $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

③ Inhomogene DGL – Ansatz Variation der Konstanten

- $y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$
- $y'(x) = C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x) + \underbrace{C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x)}_{\overset{!}{=}0}$

$$= C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x)$$

Annahme: $C_1(x)$ und $C_2(x)$ erfüllen
$C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0$

- $y''(x) = C_1(x)\, y_1''(x) + C_2(x)\, y_2''(x) + C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x)$
- Einsetzen in $y'' + ay' + by = g$

$C_1(x)\, y_1''(x) + C_2(x)\, y_2''(x) + C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x)$

$$+\, a(x)\left[C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)\right] + b(x)\left[C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)\right] = g(x)$$

$$\Rightarrow C_1(x)\overbrace{\left[y_1''(x)+a(x)y_1'(x)+b(x)y_1(x)\right]}^{=0} + C_2(x)\overbrace{\left[y_2''(x)+a(x)y_2'(x)+b(x)y_2(x)\right]}^{=0}$$

$$+\, C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = g(x)}$$

- Gleichungssystem: aus — und — folgt:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

- Da y_1 und y_2 Fundamentalsystem, $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0$

Löse (Cramersche Regel)

$$C_1'(x) = -\frac{y^2(x)\,g(x)}{W(x)} \qquad C_2'(x) = \frac{y_1(x)\,g(x)}{W(x)}$$

- Also Integration:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)\,g(x)}{W(x)}\,dx + C_3$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x)\,g(x)}{W(x)}\,dx + C_4$$

- Lösung: $y(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x)$